Untersuchungen

über

gleichflächige Polyeder.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion) der K. B. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt am 22. Mai 1909

von

Artur Rosenthal

Sonderabdruck aus: Nova Acta der Kaiserlichen Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. XCIII. Nr. 2.

Halle a. d. S.
Druck von Ehrhardt Karras.
1910.

Untersuchungen

über

gleichflächige Polyeder.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion) der K. B. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt am 22. Mai 1909

von

Artur Rosenthal

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Sonderabdruck aus: Nova Acta der Kaiserlichen Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. XCIII. Nr. 2.

Halle a. d. S.
Druck von Ehrhardt Karras.
1910.

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Juli 1909.

Die konvexen gleichflächigen und die dazu polarreziproken gleicheckigen Polyeder erster Art, die in ihrer speziellen Form als halbreguläre gleicheckige[1]) Körper bekanntlich bis auf Archimedes zurückgehen, sind in zahlreichen vorzüglichen Arbeiten so eingehend untersucht worden, dafs man über sie schon längst vollkommen unterrichtet ist.[2]) Ganz anders steht es mit den höheren gleichflächigen Polyedern. Ihre Theorie gehört, wenn wir von den vier regulären Kepler-Poinsotschen Körpern absehen, erst den letzten Dezennien an. Der erste, der die Existenz nichtkonvexer gleichflächiger Polyeder erkannte, war, meines Wissens, Hessel.[3]) Allerdings ist er nicht näher darauf eingegangen, sondern hat sich mit einem Zahlenbeispiel des Hexakisoktaeders begnügt. Die Theorie der gleichflächigen und gleicheckigen Polyeder höherer Art ist, unabhängig voneinander, von verschiedenen Seiten in Angriff genommen worden: Badoureau[4]) und Pitsch[5]) haben nur die halbregulären oder Archimedeischen Varietäten behandelt; aber beide haben ihre Aufgabe, trotz mancher origineller Einzelheiten, nur unvollständig gelöst, wie schon Hefs durch Auffindung neuer

[1]) Nach Lindemann (Zur Gesch. d. Polyeder und Zahlzeichen; Sitzber. d. math.-phys. Klasse der Kgl. Bayr. Akad. d. Wissensch., 1896, S. 625—756) sind auch halbreguläre gleichflächige Polyeder schon im Altertum bekannt gewesen.

[2]) Vgl. die zusammenfassende Darstellung und die Literaturangabe in M. Brückner, Vielecke und Vielflache; Leipzig 1900. Abschnitt E: Die besonderen Eulerschen Vielflache.

[3]) Vgl. den Artikel „Krystall“ in Gehlers physikalischem Wörterbuch (1830), S. 202 u. 203; neu herausgegeben von Hefs (1897), (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 88 u. 89), vgl. 89, S. 35—37.

[4]) In dem zweiten Teile seiner „Mémoire sur les figures isoscèles“, Journal de l'École Polytechnique Cah. 49 (1881).

[5]) „Über halbreguläre Sternpolyeder“, Zeitschrift für das Realschulwesen von Kolbe, Wien 1881, VI. Jahrg., S. 9—24, 72—89, 216.

hierhergehöriger Formen zeigen konnte. Fedorow beschäftigt sich[1]) mit den sich nichtdurchsetzenden nichtkonvexen gleichflächigen Polyedern (er nennt sie Isokoiloeder) und mit höheren konvexen Körpern, mit letzteren jedoch nur vorübergehend. Die Arbeiten von Hefs[2]) endlich überragen alle anderen weit an Bedeutung; zudem gebührt ihm auch in den meisten Punkten die Priorität. Über mehr als zehn Jahre erstrecken sich seine Untersuchungen. Er war der erste, der, wenigstens in seinen letzten Arbeiten, das Problem in seiner ganzen Ausdehnung erfafste. In einer äufserst geschickten Weise, die wirklich das Wesen der Sache trifft, scheidet er, von den Kugelnetzen ausgehend, die gleichflächigen Polyeder in die Körper „mit direkt-symmetrischen Kanten" und in solche „ohne direkt-symmetrische Kanten oder mit teilweise direkt-symmetrischen Kanten". Eine derartige Einteilung konnten die anderen der genannten Autoren nicht vornehmen, da sie, abgesehen von gewissen hemiedrischen Formen, die Existenz von Gestalten „ohne direkt-symmetrische Kanten oder mit teilweise direkt-symmetrischen Kanten" überhaupt nicht wahrnahmen. — Auf Grund des allgemeinen Satzes:[3]) „Die Flächen jedes gleichflächigen Polyeders höherer Art schliefsen ein solches erster Art als inneren Kern ein", erkannte Hefs ferner, dafs die Betrachtung der vollständigen Figur der durchaus bekannten konvexen gleichflächigen Polyeder erster Art zur Ableitung sämtlicher höherer Körper führen könne (ohne das Problem der Kugelteilung zugrunde zu legen). Aber trotzdem gelang es ihm nicht, dies zu verwirklichen. Was er angeben konnte, waren nur Beispiele; es war nicht möglich, die Fülle

[1]) E. Fedorow, Elemente der Gestaltenlehre, Verhandl. d. k. russ. min. Ges. St. Petersburg 1885, 21, 1—279 (russisch); ausführliches Selbstreferat in d. Zeitschr. für Krystallographie und Mineralogie, 1893, 21, 679—694. Es kommt für uns in Betracht: Abschnitt V „Über die Polyeder mit konkaven Ecken, wirklichen oder scheinbaren".

[2]) Sitzungsberichte der Ges. z. Bef. d. ges. Naturwissensch. zu Marburg: Vor allem: Über die möglichen Arten und Varietäten einiger Archimedeischen Körper (1872, Nr. 5); Über einige merkwürdige nicht konvexe Polyeder (1877, Nr. 1); Über Kombinationsgestalten höherer Art (1879, Nr. 9). — Ferner: Schriften der Gesellsch. z. Bef. d. ges. Naturwissensch. zu Marburg: Über die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder (Kassel 1876); Über vier Archimedeische Polyeder höherer Art (Kassel 1878). — Endlich das bekannte Werk: Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung (Leipzig 1883); hauptsächlich das siebente Kapitel.

[3]) Hefs, Kugelteilung, S. 449.

der Gestalten zu überblicken. In seinem zusammenfassenden Werke vermehrt Brückner[1]) die Reihe der von Hefs angeführten Körper noch um mehrere; wesentliche Fortschritte erreicht er nur inbezug auf die spezielleren, zugleich gleichflächigen und gleicheckigen Polyeder, die er neuerdings eingehend in einer Monographie[2]) behandelt hat. Mit Recht spricht es daher Brückner in dem Vorwort seines Werkes „Vielecke und Vielflache" aus, dafs die vollständige Bestimmung der gleicheckigen und der gleichflächigen Polyeder „ein noch ungelöstes Problem" ist, und wenn er auch dabei zunächst nur einen gewissen Teil davon im Auge hat, so besitzen seine Worte ohne Zweifel auch ganz allgemeine Geltung. —

In den folgenden Ausführungen soll nunmehr versucht werden, wenigstens über die gleichflächigen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten einige Klarheit zu verschaffen. Es sollen jedoch vorläufig nur die Polyeder des kubischen Systems untersucht werden, d. h., nach der Hefs'schen Ausdrucksweise, die Körper, welche in die zweite Hauptklasse, erste Ordnung gehören.[3]) Für alle anderen Ordnungen läfst sich die Betrachtung Schritt für Schritt ganz genau in gleicher Weise durchführen. Ferner gilt natürlich alles, was für die gleichflächigen Polyeder abgeleitet wird, in dualer Übertragung unmittelbar für die polarreziproken gleicheckigen Körper. Die genannte Ordnung wurde für die Bearbeitung ausgewählt wegen des hohen Grades der Symmetrie der Gestalten und wegen des damit zusammenhängenden besonders grofsen Reichtums an Formen, vor allem aber deswegen, weil bekanntlich aus dem Hexakisoktaeder

[1]) a. a. O., Abschnitt F: Die besonderen Vielflache höherer Art. Dem trefflichen Buche sind die Photographien von Modellen der meisten bis dahin bekannten gleichflächigen und gleicheckigen Polyeder beigegeben.

[2]) Über die gleicheckigen und gleichflächigen, diskontinuierlichen und nichtkonvexen Polyeder. Nova Acta, Abh. d. Kais. Leop.-Carol. D. Akad. d. Naturf. Bd. LXXXVI, Nr. 1. Ebenfalls mit Abbildungen und Lichtdrucktafeln glänzend ausgestattet. — Vgl. auch den kurzen Auszug daraus: Zur Geschichte der Theorie der gleicheckig-gleichflächigen Polyeder, Unterrichtsblätter für Math. u. Naturwissensch. 1907, Nr. 5 u. 6; sowie den Vorbericht: Verh. des 3. intern. Math. Kongr. z. Heidelberg, 1904, S. 707—713.

[3]) Eine kurze Übersicht über die wesentlichsten Ergebnisse der vorliegenden Untersuchungen (natürlich ohne Berücksichtigung der zahlreichen Einzelresultate) ist bereits veröffentlicht worden; vgl. A. Rosenthal, Zur Theorie der gleichflächigen Polyeder, Sitzber. d. math.-phys. Kl. d. Kgl. Bayer. Ak. d. Wiss., Bd. XXXVIII, 1908, Heft I.

bloſs durch spezielle Annahme der Parameter die übrigen sechs holoedrischen Körper entstehen, nämlich das Tetrakishexaeder, Ikositetraeder, Triakisoktaeder, Rhombendodekaeder, Hexaeder und Oktaeder, und weil ferner durch Meroedrie sich noch weitere acht Polyeder ergeben, nämlich das Hexakistetraeder, Triakistetraeder, Deltoiddodekaeder, Tetraeder, Diakisdodekaeder, Pentagondodekaeder, Pentagonikositetraeder, Tetraedrisches Pentagondodekaeder; (aufserdem noch gewisse hauptachsige Gestalten, jedoch nicht die allgemeinsten ihrer Gattung). Da nun bekanntlich 30 konvexe gleichflächige Polyeder erster Art existieren, so wird durch die Untersuchung der bezeichneten Ordnung von fünfzehn Gliedern genau die Hälfte aller solcher Formen behandelt.

Es soll nun im folgenden, nach einer Betrachtung der vollständigen Figur des Hexakisoktaeders, die Anzahl aller überhaupt möglichen hierzu gehörenden gleichflächigen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten abgeleitet werden. Des weiteren werden alle diese Polyeder bezüglich ihres äufseren Anblicks untersucht und die möglichen Typen der Aufsenflächen festgestellt. Daran reiht sich die Angabe aller konvexen Polyeder; es folgt die Bestimmung der „konzentrischen Anordnungen“; endlich werden die Archimedeischen Varietäten abgeleitet. Nachdem dies alles für das Hexakisoktaeder durchgeführt ist, ergibt grofsenteils die bloſse Spezialisierung der Resultate das Entsprechende für die übrigen sechs holoedrischen Gattungen und auch die Untersuchung der acht Meroedrien erfolgt im engsten Anschlufs an das Vorhergehende.

§ 1.

Die vollständige Figur des Hexakisoktaeders.

Die holoedrischen Formen des kubischen Systems besitzen, wie bekannt, dreierlei Symmetrieachsen: drei vierzählige, vier dreizählige und sechs zweizählige. Die einzelnen Polyederindividuen werden in der Krystallographie charakterisiert durch die Abschnitte der Polyederflächen auf den vierzähligen Symmetrieachsen (nach Weifs) oder deren reziproke Werte (nach Miller). Im folgenden werden die Symbole von Weifs benutzt werden, da sie am anschaulichsten sind. Die Individuen des Hexakisoktaeders werden durch die Indizes $(na,\ ma,\ a)$ oder, wenn man $a = 1$ setzt, durch $(n,\ m,\ 1)$ bestimmt. Das besagt: Jede Fläche des dadurch gegebenen Hexakisoktaeders schneidet auf den drei Koordinatenachsen Strecken ab, die sich wie $n : m : 1$ verhalten. In jedem dieser Achsenpunkte $(A,\ B,\ C)$ treffen sich $2 \cdot 4 = 8$ Ebenen. Um die Eindeutigkeit zu wahren, ist festgesetzt, dafs immer $n \geq m \geq 1$ sei. Durch ein solches Symbol ist dann aber selbstverständlich nicht nur ein Hexakisoktaeder (im engeren Sinn), sondern auch seine ganze vollständige Figur gekennzeichnet, also nicht nur ein konvexes gleichflächiges Polyeder erster Art, sondern auch alle aus ihm abzuleitenden höheren Körper.[1]) Die Gesamtheit aller durch ein Symbol bestimmten Gestalten soll eine Polyederfamilie genannt werden; alle Familien, deren Zeichen gleichartig[2]) gebaut sind, mögen dagegen eine Polyedergattung heifsen (also z. B. Polyedergattung des Hexakisoktaeders).

---

[1]) Die Zeichen von Hessel und Hefs leisten dies nicht, da durch sie nicht die ganze Fläche, sondern nur Stücke derselben dargestellt werden.

[2]) d. h. identisch, wenn die speziellen Zahlen (ausgenommen die Grenzwerte) durch allgemeine Buchstaben ersetzt werden.

Endlich soll das konvexe gleichflächige Polyeder erster Art, welches den Kern einer vollständigen Figur bildet, als Kernform bezeichnet werden.

Zur Bestimmung mehrfacher Schnittpunkte der vollständigen Figur ist folgender Hilfssatz vorher zu beweisen:

Schneiden sich drei Gerade in einem Punkte und trägt man von diesem Punkte aus, auf jeder der Linien je drei beliebige Strecken so an, dafs die Abschnitte auf den einzelnen Geraden in gleichem Verhältnisse $(m:n:1)$ stehen, verbindet man endlich immer drei verschiedenartige von den dadurch bestimmten Punkten durch Ebenen, so gehen die auf diese Weise gebildeten sechs Ebenen durch einen Punkt S.

Beweis.

Die Gleichungen der sechs Ebenen, auf die drei gegebenen Geraden als Achsen bezogen, sind:

$$\begin{array}{l|l} \frac{x}{r}+\frac{y}{ms}+\frac{z}{nt}-1=0 & \frac{x}{r}+\frac{y}{ns}+\frac{z}{mt}-1=0 \\ \frac{x}{mr}+\frac{y}{ns}+\frac{z}{t}-1=0 & \frac{x}{mr}+\frac{y}{s}+\frac{z}{nt}-1=0 \\ \frac{x}{nr}+\frac{y}{s}+\frac{z}{mt}-1=0 & \frac{x}{nr}+\frac{y}{ms}+\frac{z}{t}-1=0 \end{array}$$

Es ist nachzuweisen, dafs die vierreihigen Determinanten der Koeffizienten der ersten drei Gleichungen, abwechselnd verbunden mit je einer der drei letzten, verschwindet. Die Determinante der ersten vier Gleichungen lautet:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{ms} & \frac{1}{nt} & -1 \\ \frac{1}{mr} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{nr} & \frac{1}{s} & \frac{1}{mt} & -1 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{mt} & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{rst(mn)^3} \begin{vmatrix} mn & n & m & 1 \\ n & m & mn & 1 \\ m & mn & n & 1 \\ mn & m & n & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{rst(mn)^3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & n-m & m-n & 0 \\ n(1-m) & 0 & n(m-1) & 0 \\ m(1-n) & m(n-1) & 0 & 0 \\ mn & m & n & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-(m-n)\cdot(m-1)\cdot(n-1)}{rst(mn)^2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ganz ebenso für die beiden anderen Determinanten. Also gehen die sechs Ebenen durch einen Punkt (S). q. e. d.

Der Beweis behält natürlich seine Giltigkeit, auch wenn irgend welche von den drei Verhältniszahlen $(m, n, 1)$ negativ sind.

Die Verbindungslinie von S mit dem Achsenschnittpunkt O ist die Diagonale des durch sich entsprechende Achsenpunkte bestimmten Parallelopipeds.

Denn die Koordinaten von S (in dem oben eingeführten Koordinatensystem) sind:

$$x = \frac{1}{st(mn)^2 \Delta} \begin{vmatrix} 1 & n & m \\ 1 & m & mn \\ 1 & mn & n \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{rt(mn)^2 \Delta} \begin{vmatrix} mn & 1 & m \\ n & 1 & mn \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = \frac{1}{rt(mn)^2 \Delta} \begin{vmatrix} 1 & m & mn \\ 1 & mn & n \\ 1 & n & m \end{vmatrix} = \frac{1}{rt(mn)^2 \Delta} \begin{vmatrix} 1 & n & m \\ 1 & m & mn \\ 1 & mn & n \end{vmatrix}$$

$$z = \frac{1}{rs(mn)^2 \Delta} \begin{vmatrix} mn & n & 1 \\ n & m & 1 \\ m & mn & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{rs(mn)^2 \Delta} \begin{vmatrix} 1 & mn & n \\ 1 & n & m \\ 1 & m & mn \end{vmatrix} = \frac{1}{rs(mn)^2 \Delta} \begin{vmatrix} 1 & n & m \\ 1 & m & mn \\ 1 & mn & n \end{vmatrix}$$

Also verhält sich in der Tat $x : y : z = r : s : t$.

Wenn die Achsen aufeinander senkrecht stehen, und die Abschnitte auf ihnen nicht nur in gleichem Verhältnis stehen, sondern gleich grofs sind, dann wird aus dem Parallelopiped ein Würfel, die Diagonale SO steht symmetrisch zu den Achsen, bildet also die trigonale Zwischenachse des Oktanten. Da sich nun in unserer vollständigen Figur auf jeder vierzähligen Koordinatenhalbachse ein Punkttripel A, B, C befindet, so ist die Möglichkeit gegeben, jede der drei Punktarten mit den negativen zu vertauschen. Man erhält also auf jeder dreizähligen Zwischenachse $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ solche Punkte S, die sich wegen der Symmetrie zu je vieren in gleicher Weise auf beide Halbachsen verteilen; sie mögen S_1, S_2, S_3, S_4 heifsen. In der vollständigen Figur gibt es also im ganzen $4 \cdot 8 = 32$ Punkte S, von jeder Art acht.

Um die Punkte auf den zweizähligen Achsen zu erhalten, denke man sich die vollständige Figur längs einer Koordinatenebene durchschnitten; wie in jeder beliebigen Symmetrieebene sind auch hier 24 Spurlinien vorhanden. Je zwei entsprechend verlaufende Linien schneiden sich in einem

Punkte (T) einer zweizähligen Achse, so dafs auf einer solchen $\frac{24}{2} = 12$ Punkte sich befinden, auf einer zweizähligen Halbachse also sechs.

Diese sechs Punkte mögen nach ihrer Entstehungsweise heifsen: ab, ac, bc; $a\bar{b}$, $a\bar{c}$, $b\bar{c}$.

Denn in ab schneidet sich die Verbindungslinie eines Punktes A der einen Koordinatenachse mit einem Punkte B der anderen Achse und die Verbindungslinie eines Punktes B der ersten und eines Punktes A der zweiten Achse; analog entsteht

ac	durch	den	Schnitt	von	$A \sim C$	und	$C \sim A$
bc	„	„	„	„	$B \sim C$	„	$C \sim B$
$a\bar{b}$	„	„	„	„	$A \sim (-B)$	„	$(-B) \sim A$
$a\bar{c}$	„	„	„	„	$A \sim (-C)$	„	$(-C) \sim A$
$b\bar{c}$	„	„	„	„	$B \sim (-C)$	„	$(-C) \sim B$

In jedem dieser Punkte schneiden sich (wie auch in jedem in einer Symmetrieebene, aber nicht auf einer Achse gelegenen Schnittpunkte) vier Polyederflächen, da in jeder der Spurlinien zwei Flächen einander begegnen.

Durch die neun Symmetrieebenen wird die vollständige Figur in 48 gleiche (bezw. symmetrische) Zellen eingeteilt; in den drei (verschiedenartigen) Zellachsen liegen die Punkte A, B, C; S_1, S_2, S_3, S_4; ab, ac, bc, $a\bar{b}$, $a\bar{c}$, $b\bar{c}$, die wir unter dem Namen Achsenhauptpunkte zusammenfassen wollen. —

Da ein innerhalb der Zelle liegendes Flächenstück durch die Abschnitte auf den drei Zellachsen bestimmt ist (wie es auch in den Symbolen von Hessel und Hefs geschieht), so ist es nötig, die Gröfse dieser durch die Achsenhauptpunkte begrenzten Strecken zu bestimmen und zwar unter Zugrundelegung von a als Einheit.

1. Vierzählige Achse:

$$\begin{aligned} OA &= a \\ OB &= ma \\ OC &= na \end{aligned}$$

Immer $OC \geq OB \geq OA$, da $n > m \geq 1$.

2. Dreizählige Achse:

Aus $$\frac{x}{pa} + \frac{y}{qa} + \frac{z}{ra} - 1 = 0$$

ergibt sich $$x = y = z = \frac{pqr}{pq + pr + qr} \cdot a.$$

Also

$$O - S = \frac{pqr}{pq + pr + qr} \cdot a\sqrt{3}.$$

Demnach erhält man, wenn $|p| = n$; $|q| = m$; $|r| = 1$ ist:

$$O - S_1 = \frac{mn}{mn + n + m} a\sqrt{3} \text{ (Schnittpunkt der Ebenen } A\,B\,C)$$

$$O - S_2 = \frac{mn}{mn + n - m} a\sqrt{3} \text{ („ „ „ } A\,B\,\overline{C})$$

$$O - S_3 = \frac{mn}{mn - n + m} a\sqrt{3} \text{ („ „ „ } A\,\overline{B}\,C)$$

$$O - S_4 = \frac{mn}{mn - n - m} a\sqrt{3} \text{ („ „ „ } A\,\overline{B}\,\overline{C})$$

$$\text{bez.} = \frac{mn}{n + m - mn} a\sqrt{3} \text{ („ „ „ } \overline{A}\,B\,C)$$

Es kann nämlich $mn \gtreqless n + m$ sein.

Für $mn > n + m$ befindet sich also der Schnittpunkt der Ebenen $A\,\overline{B}\,\overline{C}$ auf der zur betrachteten Zelle gehörigen, positiv gerechneten Halbachse, während der Schnittpunkt der Ebenen $\overline{A}\,B\,C$ symmetrisch dazu auf der negativen Halbachse liegt. Diese beiden Schnittpunkte fallen im Unendlichen zusammen, wenn $mn = n + m$ ist. In $S_{4\infty}$ treffen sich also zwölf Polyederflächen. Endlich für $mn < n + m$ rückt der Schnittpunkt der Ebenen $A\,\overline{B}\,\overline{C}$ auf die negative, der Schnittpunkt der Ebenen $\overline{A}\,B\,C$ in die symmetrische Lage auf die positive Halbachse. Es ist also auf jeder trigonalen Halbachse immer ein Punkt S_4, der von O die Entfernung $\left|\frac{mn}{mn - n - m} a\sqrt{3}\right|$ hat, vorhanden, nur von anderen Ebenen gebildet, je nachdem $mn <$ oder $> n + m$ ist. Gemäfs dieser Eigenschaft sondern sich die Hexakisoktaeder (eigentlich ihre vollständigen Figuren) in drei Untergattungen: (α) $mn > n + m$ und (β) $mn < n + m$, wobei (γ) $mn = n + m$ die Übergangsformen darstellt. Die wirkliche Bedeutung dieser Unterscheidung wird erst weiter unten ersichtlich werden. —

Immer ist $O-S_4 \geq O-S_3 > O-S_2 \geq O-S_1$, da stets

$$\frac{mn}{mn-n-m} \geq \frac{mn}{mn-n+m} \geq \frac{mn}{mn+n-m} > \frac{mn}{mn+n+m}.$$

3. Zweizählige Achse:

Man betrachtet die Spurlinien in einer Hauptsymmetrieebene:

Aus $$\frac{x}{pa} + \frac{y}{qa} - 1 = 0$$

ergibt sich

$$x = y = \frac{pq}{p+q} \cdot a.$$

Also

$$O-pq = \frac{pq}{p+q} \cdot a\sqrt{2}.$$

Demnach ist:

$$O-ab = \frac{m}{m+1}\, a\sqrt{2} \quad | \quad O-a\bar{b} = \frac{m}{m-1}\, a\sqrt{2}$$

$$O-ac = \frac{n}{n+1}\, a\sqrt{2} \quad | \quad O-a\bar{c} = \frac{n}{n-1}\, a\sqrt{2}$$

$$O-bc = \frac{mn}{n+m}\, a\sqrt{2} \quad | \quad O-b\bar{c} = \frac{mn}{n-m}\, a\sqrt{2}.$$

Es ist immer

$$O-bc > O-ac > O-ab, \quad \text{da stets} \quad \frac{mn}{m+n} \geq \frac{n}{n+1} \geq \frac{m}{m+1},$$

ferner

$$O-a\bar{b} > O-a\bar{c}, \quad \text{da} \quad \frac{m}{m-1} \geq \frac{n}{n-1}$$

$$O-b\bar{c} > O-a\bar{c}, \quad \text{da} \quad \frac{mn}{n-m} > \frac{n}{n-1}$$

$$O-a\bar{c} \geq O-ac, \quad \text{da} \quad \frac{n}{n-1} \geq \frac{n}{n+1}$$

$$O-b\bar{c} \geq O-bc, \quad \text{da} \quad \frac{mn}{n-m} \geq \frac{mn}{n+m}.$$

Also alle andern $\geq O-ac \geq O-ab$.

Dagegen variieren:

1. $O-b\bar{c} \gtreqless O-a\bar{b}$, wenn $\frac{mn}{n-m} \gtreqless \frac{m}{m-1}$,

also wenn $m \gtreqless \frac{2n}{n+1}$;

II. $O-bc \gtreqless O-a\bar{b}$, wenn $\frac{mn}{n+m} \gtreqless \frac{m}{m-1}$,

also wenn $m \gtreqless \frac{2n}{n-1}$;

III. $O-bc \gtreqless O-a\bar{c}$, wenn $\frac{mn}{n+m} \gtreqless \frac{n}{n-1}$,

also wenn $n \gtreqless \frac{2m}{m-1}$.

Um nun eine richtige Vorstellung von der Art der gegenseitigen Durchdringung der Flächen zu erlangen, soll eine solche Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung verfolgt werden. Die Spurlinien der übrigen Flächen in ihr werden am besten ein Bild von der vollständigen Figur geben. Die Fläche schneidet alle Achsen und Symmetrieebenen einmal und mufs wegen der vollen Gleichwertigkeit aller Flächen alle überhaupt möglichen Arten von Schnittpunkten und Schnittlinien enthalten (Fig. 1). Unsere Fläche treffe die positiven Koordinatenhalbachsen in den Punkten A, B bez. C und sei deshalb mit $(A\,B\,C)$ bezeichnet. Dann sind AB, AC und BC die Schnittlinien mit den drei Hauptsymmetrieebenen und zugleich die Spurlinien der in bezug auf diese Symmetrieebenen zu der von uns betrachteten Fläche symmetrisch gelegenen Polyederflächen. Jede dieser Spurlinien trifft die beiden in den zugehörigen Hauptsymmetrieebenen gelegenen zweizähligen Achsen und zwar liegen

auf AB: zwischen A und B der Punkt ab; über A hinaus der Punkt $a\bar{b}$,
„ AC: „ A „ C „ „ ac; „ A „ „ „ $a\bar{c}$,
„ BC: „ B „ C „ „ bc; „ B „ „ „ $b\bar{c}$.

Da sowohl die beiden vierzähligen als die beiden zweizähligen Achsen aufeinander senkrecht stehen und die beiden Paare gegenseitig ihre Winkel halbieren, so ist

$$(A,\ B,\ ab,\ a\bar{b}) = -1$$
$$(A,\ C,\ ac,\ a\bar{c}) = -1$$

und

$$(B,\ C,\ bc,\ b\bar{c}) = -1.$$

Die Linien

$A-bc$ und $A-b\bar{c}$
$B-ac$ und $B-a\bar{c}$
$C-ab$ und $C-a\bar{b}$

stellen die Schnitte der sechs Zwischensymmetrieebenen dar und zugleich die Spurlinien der in bezug auf diese Symmetrieebenen symmetrisch gelegenen Polyederflächen. Jede dieser Schnittlinien trifft die beiden in den zugehörigen Zwischensymmetrieebenen gelegenen dreizähligen Achsen, und zwar liegen (wie sich aus der Zusammenstellung S. 53 ergibt):

auf $A-bc$: zwischen A und bc der Punkt S_1; α) über A, β) über bc hinaus der Punkt S_4
„ $B-ac$: „ B „ ac „ „ S_1; über ac „ „ „ S_3
„ $C-ab$: „ C „ ab „ „ S_1; „ ab „ „ „ S_2
„ $A-b\bar{c}$: „ A „ $b\bar{c}$ „ „ S_2; „ A „ „ „ S_3
„ $B-a\bar{c}$: „ B „ $a\bar{c}$ „ „ S_2; α) über $a\bar{c}$, β) über B „ „ „ S_4
„ $C-a\bar{b}$: „ C „ $a\bar{b}$ „ „ S_3; α) „ $a\bar{b}$, β) „ C „ „ „ S_4

Der Fall α) tritt ein, wenn $mn > n+m$, der Fall β), wenn $mn < n+m$; für γ) $nm = n+m$ liegt S_4 im Unendlichen, d. h. $A-bc$, $B-a\bar{c}$ und $C-a\bar{b}$ sind dann zu einander parallel.

Durch jeden der Punkte S gehen also (wie es sich von selbst versteht), drei Spurlinien von Zwischensymmetrieebenen. — Da die vier durch einen der Punkte A, B, C gehenden Spurlinien von Symmetrieebenen ein harmonisches Büschel bilden, so ist auch

$$(A,\ bc,\ S_1,\ S_4) = -1 \quad | \quad (A,\ b\bar{c},\ S_2,\ S_3) = -1$$
$$(B,\ ac,\ S_1,\ S_3) = -1 \quad | \quad (B,\ a\bar{c},\ S_2,\ S_4) = -1$$
$$(C,\ ab,\ S_1,\ S_2) = -1 \quad | \quad (C,\ a\bar{b},\ S_3,\ S_4) = -1.$$

Zur Ausführung der Konstruktion und zu ihrer Kontrolle sei noch weiter angegeben, dafs (wegen der Eigenschaften von Pol und Polare bezüglich eines Dreiecks [$\triangle ABC$!]) die Punkttripel $a\bar{b}$, $a\bar{c}$, $b\bar{c}$; bc, ac, $a\bar{b}$; bc, ab, $a\bar{c}$ und ac, ab, $b\bar{c}$ je auf einer Geraden liegen (die jedoch nicht als Spurlinien von Flächen auftreten). —

Die neun in den Symmetrieebenen liegenden Spurlinien sind (nach der Definition von Hefs)[1] die direkt-symmetrischen Kanten. Diese allein (bezw. Teile von ihnen) dürfen also bei den von uns abzuleitenden Polyedern als Kanten vorkommen, alle andern Linien sind blofs als Schnittlinien (Doppellinien) in Betracht zu ziehen. Deshalb können auch nur die

[1] Der Begriff der direkt-symmetrischen Kante wurde von Hefs zunächst für die Kugelnetze der Polyeder gebildet.

Achsenhauptpunkte als Eckpunkte auftreten, die übrigen Punkte dagegen blofs als Schnittpunkte (Doppelpunkte).

Da je zwei Polyederflächen, welche auf den Achsen entgegengesetzt gleiche Abschnitte bestimmen, parallel sind, so ist eine der 47 Spurlinien in unserer Schnittebene die unendlich ferne Gerade, während die übrigen 46 Linien paarweise zu einander parallel sind. Unter Berücksichtigung dieser Umstände lassen sich die 38 nicht in Symmetrieebenen gelegenen Spurlinien[1]) in folgender Weise gruppieren:

a) Die unendlich ferne Gerade;

b) Die neun zu den direkt-symmetrischen Kanten parallelen Linien;

α) Die drei Parallelen zu AB, AC, BC gehen durch C, B bez. A; denn die Linie AB wird durch die Ebene $(AB\bar{C})$ ausgeschnitten; usw.

β) Die sechs Parallelen zu $A-bc$, $B-ac$, $C-ab$; $A-b\bar{c}$, $B-a\bar{c}$, $C-a\bar{b}$ gehen durch $b\bar{c}$, $a\bar{c}$, $a\bar{b}$; bc, ac bez. ab; denn die Linie $A-bc$ wird durch die Ebene (ACB) ausgeschnitten und die in gleicher Symmetrieebene gelegenen Geraden BC und $\bar{C}\bar{B}$ treffen sich in $b\bar{c}$; usw.

Jede von diesen neun Linien ist also parallel zu einer Symmetrieebene und geht gleichzeitig durch die dazu senkrechte (vier- bez. zweizählige) Achse. Eine Drehung von 180° um diese Achse, die alle Flächen und Kanten mit den in bezug auf die Achse symmetrischen zur Deckung bringt, überführt die bezeichnete zur Achse senkrechte Linie in sich selbst, jedoch unter Vertauschung der beiden Halbachsen. Es wird also bei einer derartigen Drehung von den beiden, in einer solchen Linie sich schneidenden Ebenen die eine in die andere transformiert. Deshalb wollen wir diese Linien indirekt-symmetrische Kanten oder Symmetriekanten zweiter Art nennen.

c) 14 Linien, die zu je zweien durch die Achsenhauptpunkte A, B, C; S_1, S_2, S_3, S_4 hindurchgehen; denn in jedem Schnittpunkt einer vierzähligen Achse müssen sich sieben, in jedem Schnittpunkt einer dreizähligen Achse fünf Spurlinien treffen.

[1]) Die einzelnen Linien unserer Schnittfigur kann man durch die Indizes der schneidenden Ebenen bezeichnen (vgl. Fig. 1).

d) Die 14 Strahlen, die zu den unter c) genannten parallel sind; keiner von ihnen geht durch einen Achsenhauptpunkt. —

In jeder Schnittlinie treffen sich zwei Ebenen. Da eine solche Schnittlinie im allgemeinen zum Achsensystem unsymmetrisch gelegen ist, so wird sie auch in jeder der beiden Ebenen verschieden verlaufen. Deshalb sind im allgemeinen in jeder Fläche je zwei Linien kongruent, d. h. die Schnittpunkte auf ihnen haben bezügl. gleiche Lage. Eine Ausnahme findet nur dann statt, wenn die beiden Ebenen symmetrisch zum Achsensystem liegen, die Schnittgerade also eine Symmetriekante ist. Hier entspricht die Gerade nur sich selbst; dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder gehen die beiden sich schneidenden Ebenen durch bloſse Spiegelung ineinander über (direkt-symmetrische Kanten): dann entsprechen auch die einzelnen Teile der Geraden nur sich selbst. Oder es muſs eine der beiden Ebenen um eine zur Schnittlinie senkrechte Achse um 180° gedreht werden, damit sie mit der andern zur Deckung gebracht werden kann (indirekt-symmetrische Kanten). In diesem Falle sind die beiden von dem Achsenhauptpunkt ausgehenden Halbstrahlen einander kongruent.

Die Indizes der kongruenten Geraden werden dadurch gefunden, daſs man die Ebene der Schnittfigur auf die schneidende Ebene bezieht, also durch Transposition des Symbols; z. B.

Ebene der Schnittfigur $(A\,B\,C)$
Schnittlinie $(\overline{C}\,A\,B)$
kongruente Gerade $(B\,C\,\overline{A})$,

d. h. der über dem A bez. B bez. C des Symbols der Schnittlinie stehende Buchstabe des Zeichens der Schnittfigurebene steht in dem Symbol der kongruenten Geraden an erster bez. zweiter bez. dritter Stelle. Dabei ist die Regel zu beachten:

$+$ bez. $\overset{-}{+}$ gibt $-$
$\overset{+}{+}$ bez. $-$ gibt $+$.

Von den unter c) genannten Schnittlinien sind immer die beiden durch denselben Achsenhauptpunkt gehenden einander kongruent; denn sie haben einen nur sich selbst entsprechenden Punkt gemeinsam. Von den zu d) gehörigen Geraden sind immer die beiden einander kongruent, welche zu einem Linienpaar, das durch einen Hauptachsenpunkt geht, parallel sind.

Wenn man nämlich das Symbol einer geg. Linie ins Negative verkehrt, so geht auch das durch Transposition gewonnene Symbol der kongruenten Geraden in seinen entgegengesetzten Wert über, d. h. wenn zwei Strahlen einander entsprechen, so gilt dies auch für die beiden parallelen Strahlen. —

Irgend eine Gerade ist gleichweit entfernt von den Berührungspunkten der beiden von ihr aus an eine Kugel gelegten Ebenen. Deshalb besitzen auch in unserer Schnittfläche je zwei kongruente Spurlinien den gleichen Abstand von dem Berührungspunkt der dem Hexakisoktaeder einbeschriebenen Kugel. Daraus folgt weiter, dafs der Berührungspunkt, der Schnittpunkt zweier kongruenter Linien und der Schnittpunkt der dazu parallelen, ebenfalls einander kongruenten Strahlen auf einer Geraden liegen, die den Winkel der kongruenten Linienpaare halbiert. Der Berührungspunkt selbst ist der Fufspunkt des vom Kugelmittelpunkt O auf die Fläche gefällten Lotes, also der Höhenschnittpunkt H des $\triangle ABC$.

Ähnliches wie für die Schnittlinien gilt auch für die Schnittpunkte. Wenn in einem Schnittpunkt unserer vollständigen Figur sich p Ebenen treffen und die Zahl der Symmetrien[1]) des Punktes s ist, dann ist ein derartiger Punkt $\frac{p}{s}$ mal in unserer Schnittebene vorhanden. Also tritt jeder Achsenhauptpunkt nur einmal auf, die übrigen in Symmetrieebenen gelegenen Schnittpunkte je zweimal (auf direkt-symmetrischen Kanten gelegen). Alle andern Schnittpunkte kommen (da sich in ihnen immer drei Flächen begegnen) in unserer Schnittfigur je dreimal vor; und zwar liegen homologe Punkte auf konzentrischen Kreisen mit dem Berührungspunkt der eingeschriebenen Kugel als Mittelpunkt, da gleichartige Punkte der vollständigen Figur eines gleichflächigen Polyeders auf Kugeln verteilt sind, die mit der einbeschriebenen Kugel konzentrisch sind (Hefs[2]).

Die Betrachtungen dieses § werden eine genügende Vorstellung von der vollständigen Figur und dem ebenen Schnitt vermittelt haben, so dafs jetzt zu den Polyedern selbst übergegangen werden kann. —

[1]) D. h. die Anzahl der Lagen, welche eine diesen Punkt enthaltende Polyederebene durch Spiegelung an den durch den Punkt gehenden Symmetrieebenen sowie durch Drehung um die nach dem Punkte laufende Achse einnehmen kann.

[2]) Kugelteilung, S. 448/449.

§ 2.

Die Grundformen und die Anzahl der gleichflächigen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten für irgend eine Hexakisoktaederfamilie.

Es handelt sich zunächst darum: Wieviele verschiedene Formen können die eine Zelle ausfüllenden Flächenstücke annehmen? Dies fällt zusammen mit der Frage: In wieviele Teile wird eine Fläche durch die direkt-symmetrischen Kanten zerlegt?

Es ist klar, dafs ebensogrofs die Anzahl der einfachen[1]), sich nicht durchsetzenden Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten ist.

Beweis.

Die Spiegelung an jeder der Symmetriekanten des die Zelle erfüllenden Polyederebenenteiles bringt diesen in eine zur Kante symmetrische Lage, welche einer anderen Polyederfläche angehört. Dieses läfst sich fortsetzen, bis sämtliche Zellen einmal überdeckt sind und wir ein geschlossenes, sich nicht durchsetzendes Polyeder vor uns haben. Jede Zelle mufs nämlich mindestens einmal überdeckt werden, da man von irgend einer Zelle aus durch eine endliche Anzahl von Spiegelungen an Symmetrieebenen zu jeder anderen Zelle gelangen kann. Ferner kann jede Zelle nur einmal überdeckt werden. Denn bei der Spiegelung an einer Symmetrieebene geht immer eine vier-, drei- bez. zweizählige Achse wieder in eine gleichartige Achse über. Die Abschnitte, welche das die Zelle überdeckende Flächenstück auf jeder Zellachse macht, sind eindeutig bestimmt; also gehen auch die auf gleichartigen Achsen gelegenen Abschnitte bei der Spiegelung ineinander über. Deshalb sind in jeder Zelle die Abschnitte auf den betreffenden

[1]) D. h. nicht zerfallenden.

Achsen genau so grofs wie in der ursprünglichen Zelle und dadurch ist die Lage des überdeckenden Ebenenteiles in der neuen Zelle eindeutig bestimmt; aus gleichem Grunde ist die Lage der in den Symmetrieebenen liegenden Kanten eindeutig gegeben. Deshalb mufs die durch den Spiegelungsprozefs sich bildende Gestalt geschlossen sein. Das so entstehende Polyeder kann sich auch nicht selbst durchsetzen; denn sonst müfste mindestens eine Zelle von mehr als einer Ebene überdeckt werden, was nach dem vorhergehenden unmöglich ist. — Die nach dem obigen erhaltenen einfachen, sich nicht durchsetzenden Polyeder, sind auch die einzig möglichen, da ja auch umgekehrt bei einem sich nicht durchsetzenden, einfachen Polyeder jede Zelle nur einfach überdeckt sein kann. q. e. d.

Auf die oben gestellte Frage gibt die Konstruktion der Schnittfigur unmittelbar die Antwort und die Rechnung mit Hilfe der von Eberhard[1]) angegebenen Formel bestätigt die allgemeine Gültigkeit.

Diese Formel lautet:

$$\sigma_2 = 1 + \sum_{i=2}^{n} (i-1) \cdot m_i .$$

Dabei bedeutet:

σ_2 = Anzahl der Teile, in welche die Ebene durch die Geraden zerlegt wird;

m_i = Anzahl der Schnittpunkte, in denen sich i Gerade treffen.

NB. Wie in der projektiven Geometrie wird dabei Ebene und Gerade als durch das Unendlichferne hindurch in sich geschlossen betrachtet.

In unserem Netze der direkt-symmetrischen Kanten schneiden sich nun:

in jedem Schnittpunkt	einer vierzähligen Achse	(A, B, C)	je vier Gerade,
„ „ „	„ dreizähligen „	(S_1, S_2, S_3, S_4)	„ drei „ ,
„ „ „	„ zweizähligen „	$(ab, ac, bc, a\bar{b}, a\bar{c}, b\bar{c})$	„ zwei „ .

Die direkt-symmetrischen Kanten können sonst keinen Schnittpunkt haben. (Denn ein Schnittpunkt von direkt-symmetrischen Kanten zeigt die Schnittgerade von Symmetrieebenen an; da sich aber die Symmetrieebenen nur in

[1]) V. Eberhard, Die Grundgebilde der ebenen Geometrie (1. Bd.), Leipzig 1895, S. 43. — Diese Relation ist, worauf Eberhard hinweist, mit der für einfach zusammenhängende, einfach berandete zweiseitige Flächen geltenden Eulerschen Formel $(e + f = k + 1)$ identisch. — Die obige Formel für die durch beliebige Gerade hervorgebrachte Einteilung der Ebene kann man auch, von einem endlichen ebenen Polygonnetz ausgehend, unmittelbar erhalten. —

den Achsen schneiden, so mufs der Schnittpunkt direkt-symmetrischer Kanten zugleich Schnittpunkt einer Symmetrieachse sein.)

Also ergibt sich in unserem Falle:

$$\sigma_2 = 1 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 24.$$

Dies ist die Anzahl sämtlicher Ebenenteile, sowohl der geschlossenen als der das Unendlichweite enthaltenden.

Nun bringen, wie wir im vorigen § sahen, neun direkt-symmetrische Kanten die Teilung der Ebenen hervor. Also haben wir, weil jede Gerade einen unendlichfernen Punkt besitzt, neun das Unendlichweite enthaltende Teile, vorausgesetzt, dafs keiner unserer Schnittpunkte im Unendlichen liegt. (Bei den Übergangsformen γ fällt nach dem früheren S_4 ins Unendliche!)

Wenn nun aber gewisse Schnittpunkte ins Unendliche rücken, d. h. wenn gewisse Schnittgerade unter sich parallel werden, so entstehen halbgeschlossene Teile, d. h. gewisse Eckpunkte dieser Teile liegen im Unendlichen. Also, wenn nicht eine Schnittgerade selbst ins Unendliche fällt (was beim allgemeinen Hexakisoktaeder unmöglich ist), dann treten, so oft als k untereinander parallele Gerade vorhanden sind, $2(k-1)$ halbgeschlossene Ebenenteile auf. Da $k-1$ unendlich ferne Punkte dabei verschwinden, so vermindert sich dann auch die Anzahl der durch das Unendliche hindurchschreitenden Teile um $k-1$. Daraus folgt zugleich, dafs dabei aus $k-1$ ganzgeschlossenen Ebenenteilen halbgeschlossene werden, da ja die Gesamtzahl der Teile unverändert bleibt. —

Ferner ist zu bemerken:

Sämtliche Ebenenteile (auch die das Unendlichweite enthaltenden) sind Dreiecke.

Beweis.

Wenn man mit x_h die Anzahl der h-kantigen Ebenenteile bezeichnet, so ist

$$x_3 + x_4 + \ldots + x_m = 24. \tag{1}$$

Ferner sind (nach § 1) auf jeder Symmetrielinie je vier Schnittpunkte gelegen, wodurch jede Symmetrielinie in vier Stücke zerlegt wird, von denen

jedes eine Kante zweier benachbarter Ebenenteile ist. Da aufserdem neun Symmetrielinien vorhanden sind, so ist

$$3x + 4x + \ldots + m \cdot x_m = 2 \cdot 9 \cdot 4 = 72. \tag{2}$$

Wenn man Gleichung (2) von der mit drei multiplizierten Gleichung (1) abzieht, so erhält man

$$-x_4 - 2x_5 - \ldots - (m-3)x_m = 0.$$

Da nun alle $x_h \geq 0$ sind, so ergibt sich daraus, dafs jedes dieser Glieder (x_h für $h > 3$) gleich 0 ist.

Also haben wir immer lauter Dreiecke. q. e. d.

Dies steht in Übereinstimmung damit, dafs die Ebenenteile von den Spuren der Zellen begrenzt werden. Deshalb nennen wir im folgenden die von den Symmetriekanten begrenzten Ebenenteile: Zellformen. —

Nach alldem ergeben sich bei dem allgemeinen Hexakisoktaeder:

Für Untergattung α und β (kein Schnittpunkt im Unendlichen):

$24 - 9 = 15$ ganzgeschlossene Zellformen,

9 durch das Unendliche hindurchschreitende, bez., wenn man die Ebene als nicht in sich geschlossen betrachtet,

18 offenene Zellformen. (Denn je zwei offene Teile ergänzen sich zu einem das Unendliche durchschreitenden.)

Also, wenn man die Ebene (die eine beliebige Polyederfläche repräsentiert) als nicht geschlossen ansieht, so hat man $15 + 18 = 33$ Teile;

d. h.: Jede Polyederfläche erstreckt sich durch 33 verschiedene Zellen; 15 davon werden vollständig erfüllt, 18 nur teilweise. —

Für Untergattung γ (Eckpunkt S_4 liegt im Unendlichen):

Da in $S_{4\infty}$ sich $k = 3$ parallele Linien schneiden, so erhalten wir

$24 - 9 - (3-1) = 13$ ganz geschlossene Zellformen,

$2(3-1) = 4$ halb geschlossene Zellformen,

und $9 - (3-1) = 7$ das Unendlichweite enthaltende,

bez. 14 offene Zellformen.

Also gehört hier in Untergattung γ eine jede Polyederfläche nur 31 verschiedenen Zellen an; davon werden 17 ganz erfüllt (bei vier davon liegt jedoch der dritte Eckpunkt des Dreiecks, nämlich S_4, im Unendlichen; diese Zellformen sind halbgeschlossen), 14 sind nur teilweise erfüllt. —

Um nun die Zellformen benennen zu können, sollen sie durch Zahlen bezeichnet werden, wie in der folgenden Tabelle angegeben ist:

1. Geschlossene Zellformen.

Zeichen der Zellform	Abschnitte auf der vierzähl. R	dreizähl. S	zweizähl. T	Zeichen der Zellform	Abschnitte auf der vierzähl. R	dreizähl. S	zweizähl. T
	Zellachse				Zellachse		
1	A	S_1	ab	7	A	S_2	ab
2	A	S_1	ac	8	A	S_2	$a\bar{c}$
3	B	S_1	ab	9	B	S_2	ab
4	B	S_1	bc	10	B	S_2	$b\bar{c}$
5	C	S_1	ac	11	A	S_3	ac
6	C	S_1	bc	12	A	S_3	$a\bar{b}$
				13	C	S_3	ac

2. Zwischen geschlossen und offen wechselnde Zellformen.

Zeichen der Zellform	Abschnitte auf der vierzähl. R	dreizähl. S	zweizähl. T
	Zellachse		
14	A	$(S_4)\alpha\gamma!$	$a\bar{c}$
15	A	$(S_4)\alpha\gamma!$	$a\bar{b}$
16	B	$(S_4)\beta\gamma!$	bc
17	C	$(S_4)\beta\gamma!$	bc

3. Offene Zellformen.

Zeichen der Zellform	Abschnitte auf der vierzähl. R	dreizähl. S	zweizähl. T	Zeichen der Zellform	Abschnitte auf der vierzähl. R	dreizähl. S	zweizähl. T	Zeichen der Zellform	Abschnitte auf der vierzähl. R	dreizähl. S	zweizähl. T
	Zellachse				Zellachse				Zellachse		
18	$[C]$	S_2	$a\bar{c}$	24	C	S_3	$[b\bar{c}]$	30	$[C]$	$(S_4)\alpha\gamma!$	$a\bar{c}$
19	C	$[S_2]$	$[a\bar{c}]$	25	$[C]$	$[S_3]$	$b\bar{c}$	31	C	$(S_4)\beta\gamma!$	$[a\bar{c}]$
20	$[C]$	S_2	$b\bar{c}$	26	B	$[S_3]$	$b\bar{c}$	32α	$[B]$	$(S_4)\alpha$	$[bc]$
21	C	$[S_2]$	$[b\bar{c}]$	27	$[B]$	S_3	$[b\bar{c}]$	33α	$[C]$	$(S_4)\alpha$	$[bc]$
22	$[B]$	S_3	$a\bar{b}$	28	$[B]$	$(S_4)\alpha\gamma!$	$a\bar{b}$	32β	$[A]$	$(S_4)\beta$	$[a\bar{c}]$
23	B	$[S_3]$	$[a\bar{b}]$	29	B	$(S_4)\beta\gamma!$	$[a\bar{b}]$	33β	$[A]$	$(S_4)\beta$	$[a\bar{b}]$

Je zwei sich ergänzende offene Formen schneiden zusammen alle drei Zellachsen; zwei Achsenhauptpunkte gehören der einen, einer der anderen offenen Form an. Um dies auszudrücken, sind die nicht zu der betreffenden Zellform gehörenden Achsenhauptpunkte in [ ] gesetzt.

Da in jeder der Untergattungen S_4 eine andere Rolle spielt, so erfahren die Zellformen, die S_4 als Ecke enthalten, wesentliche Gestaltsveränderungen.

Für Untergattung α: sind 14 und 15 geschlossen, 16 und 17 offen; besitzen 28 und 30 je zwei Achsenpunkte, 29 und 31 nur je einen; 32α und 33α ergänzen 16 bez. 17, liegen also, wie S_4 selbst, auf der Seite von 14 und 15.

Für Untergattung β: sind 16 und 17 geschlossen, 14 und 15 offen; besitzen 29 und 31 je zwei Achsenpunkte, 28 und 30 nur je einen; 32β und 33β ergänzen 14 bez. 15, liegen also, wie S_4 selbst, auf der Seite von 16 und 17.

Für die Übergangsformen γ: sind 14, 15, 16, 17 halbgeschlossen, d. h. der Eckpunkt S_4 liegt im Unendlichen (!); besitzen 28, 30; 29, 31 je zwei Achsenpunkte, davon einen (S_4) im Unendlichen. 32 und 33 sind überhaupt verschwunden, da keine von den Zellformen 14, 15, 16, 17 einer Ergänzung bedarf. —

Jede der Zellformen bildet den 48ten Teil der Oberfläche eines einfachen, sich nicht durchsetzenden Polyeders mit direkt-symmetrischen Kanten. Es sind also in jeder Polyederfamilie der Untergattungen α und β 15 geschlossene derartige Gestalten und 18 offene möglich.[1]) Für die Übergangsformen γ ergeben sich 13 geschlossene, 4 halbgeschlossene und 14 offene.

Diese offenen Gestalten kann man jedoch nicht wohl als Polyeder gelten lassen (höchstens noch als Ausartungen von solchen). Die Projektion solcher offenen Gestalten auf eine konzentrische Kugel überdeckt diese im allgemeinen nicht lückenlos, wie es bei den geschlossenen Polyedern immer der Fall ist.

Höchst eigentümliche Gestalten erhält man an Stelle dieser offenen Formen, wenn man die Ebene und den Raum als in sich geschlossen

[1]) Diese Zahlen, wie alle folgenden, verdoppeln sich, wenn man die Hohlformen in Betracht zieht; vgl. Hessel, a. a. O. S. 203; in der Herausgabe 2. Bd. S. 37.

auffafst. Nach Analogie der „Polygone, deren Kanten das Unendlichweite enthalien“[1]) ergeben sich dann gleichflächige Polyeder, deren Flächen das Unendlichweite enthalten; sie mögen transgrediente Polyeder heifsen. Hier sind es neun (bez. sieben bei $mn = m + n$) an der Zahl; die Kugel wird von ihrer Projektion einmal vollständig bedeckt; jede Fläche hat man sich durch das Unendliche hindurch fortgesetzt zu denken.[2]) —

Wir wollen nun allgemein bestimmen: Ein Polyeder heifst von der Aten Art, wenn seine Flächen, von irgend einem für alle diese Flächen auf der gleichen Seite gelegenen Punkt aus auf eine um diesen Punkt beschriebene Kugel projiziert, diese Kugel Amal überdecken. Bei unseren gleichflächigen Polyedern mit direkt-symmetrischen Kanten[3]) können wir dies etwas spezieller ausdrücken: Ein Polyeder, dessen Flächen, vom Mittelpunkte aus auf die einbeschriebene (oder irgend eine konzentrische) Kugel projiziert, diese Kugel A mal überdecken, heifst von der A ten Art. Dieser, an Wiener sich anschliefsende Begriff weicht für nichtkonvexe Polyeder von dem Hefs'schen Artbegriff ab, fällt jedoch für konvexe Polyeder mit dem Hefs'schen Artbegriff zusammen.

Wir wollen uns zunächst noch etwas näher mit dem Artbegriff beschäftigen.

Betrachten wir zuerst den Artbegriff für Polygone! Wir bezeichnen die Art eines Polygons, wie üblich, mit a. Wiener[4]) (und wir mit ihm) leitet die Art der Polygone von der Summe der Aufsenwinkel her, während Hefs (und Brückner)[5]) von der Summe der Umfangswinkel ausgeht. Wie immer, ist dabei unter Aufsenwinkel die Ergänzung des Innenwinkels zu π

[1]) Hefs, Über gleicheckige und gleichkantige Polygone, S. 695. Schriften der Gesellschaft zur Bef. d. ges. Naturwissensch. zu Marburg, 1874.

[2]) Es sei hier bemerkt, dafs man gewöhnliche halbgeschlossene gleichflächige Polyeder erhält, wenn man bei solchen transgredienten Polyedern die unendlich ferne Gerade nicht als Schnittlinie, sondern als Kante einführt. Doch gehören diese Formen nicht hierher, weil sie Polyeder mit nur teilweise direkt-symmetrischen Kanten sind.

[3]) Da alle Kanten Symmetriekanten sind, so kann der Übergang zwischen Teilen, welche dem Mittelpunkt O verschiedene Seiten zuwenden, nicht durch Kanten, sondern nur durch einzelne Punkte stattfinden; dann kann man also immer durch geeignete Wahl der Umlaufung des Begrenzungspolygons erreichen, dafs O für alle Flächen auf der gleichen Seite liegt.

[4]) Chr. Wiener, Über Vielecke und Vielflache, Leipzig 1864, S. 2 u. 3.

[5]) Hefs, a. a. O. S. 612 ff.; Brückner, Vielecke und Vielflache, S. 3 u. 4.

zu verstehen, (so dafs bei überstumpfem Innenwinkel der Aufsenwinkel negativ wird); der Umfangswinkel dagegen ergänzt den Innenwinkel zu 3π oder zu π, je nachdem der Innenwinkel ausspringend oder einspringend ist.

Wir unterscheiden die Hefs'schen Zeichen von den Wienerschen durch Überstreichen. Dann ist also (Definition):

nach Wiener: Summe der Aufsenwinkel $= 2a\pi$,
nach Hefs: Summe der Umfangswinkel $= 2\bar{a}\pi$.

Daraus folgt also, wenn wir die Summe der Innenwinkel mit $I = q\pi$ bezeichnen:

nach Wiener: $I = n\pi - 2a\pi$; also $a = \frac{n-q}{2}$ (n = Zahl der Kanten bez. Ecken),

nach Hefs: $I = (n-k)\pi + 3k\pi - 2\bar{a}\pi = n\pi - 2(\bar{a}-k)\pi$, wenn k die Anzahl der überstumpfen Winkel ist; also $\bar{a} = \frac{n-q}{2} + k$.

Hieraus ergibt sich eine Beziehung zwischen der Wienerschen Art eines Polygons und der Hefs'schen Art, nämlich:

$$a = \bar{a} - k$$

(worauf schon Brückner hingewiesen hat[1]); deshalb ist für ein konvexes Polygon ($k = 0$): $a = \bar{a}$.

Ferner ist bekanntlich:

nach der Hefs'schen Definition: $\bar{a}$ = Anzahl der durch die Summe der Polarwinkel bedeckten Kreise,

nach der Wienerschen Definition: Wenn man von einem beliebigen Punkt aus Parallele zu allen Seiten eines Vielecks zieht und zwar in der Richtung, in welcher sie durchlaufen werden, so wird jede von dem Punkt aus einseitig gezogene Gerade G $a$mal mehr in dem Sinn überschritten, in welchem die Umlaufung stattfindet, als in dem entgegengesetzten.

Man sieht nun unmittelbar, dafs die Wienersche Definition der Artzahl eines Polygons (wenn Punkte P existieren[2]), die für alle Kanten des Polygons auf der gleichen Seite liegen) identisch ist mit der folgenden Definition:

[1]) Brückner, Vielecke und Vielflache, S. 15.

[2]) Für konvexe Polygone existieren immer solche Punkte P.

Wird das Polygon von P aus auf einen um P beschriebenen Kreis projiziert, so ist die Zahl der Kreisbedeckungen $= a$.[1])

Denn, bildet man alle n Dreiecke, deren Basis eine Kante des Polygons ist und deren Spitze in P liegt, so ist

$$I = n\pi - 2a\pi$$

[indem man von der Gesamtwinkelsumme die um P gelegenen Winkel $(2a\pi)$ abzieht]. Dies ist identisch mit der Formel für die Summe der Innenwinkel, welche sich nach der Wienerschen Artdefinition ergibt. Also stimmt unsere Definition mit der Wienerschen überein.

NB. Da die Art nur von den Winkeln abhängt, so wird sie durch eine Parallelverschiebung der Kanten nicht geändert, wenn nur Aufeinanderfolge und Richtung derselben erhalten bleibt. Damit hat man ein Mittel, um solche Polygone, für welche kein Punkt P existiert, in Polygone gleicher Art zu verwandeln, für die eventuell Punkte P vorhanden sind.

Das Analoge, wie für die ebenen Polygone, gilt auch für sphärische Polygone und deshalb für die körperlichen Ecken:

Hefs bestimmt die Art einer körperlichen Ecke durch die Art desjenigen sphärischen Polygons, das die Polarecke auf der ihrem Scheitel umschriebenen Kugel ausschneidet. Wiener[2]) versteht unter einem körperlichen Eck von der $a$ten Art ein solches, das von einer Ebene in einem Vieleck dieser Art geschnitten wird. Man könnte natürlich ebensogut das körperliche Eck durch eine seinem Scheitel umschriebene Kugel schneiden und die Art des Ecks durch die Art des so entstehenden sphärischen Polygons angeben. Ferner ergibt sich durch ähnliche Schlüsse wie oben, dafs

$$\alpha = \bar{\alpha} - \varkappa$$

ist, wobei $\varkappa$ die Anzahl der überstumpfen Winkel des sphärischen Polygons bez. die Anzahl der einspringenden Flächenwinkel des körperlichen Ecks bedeutet. Deshalb ist wieder für konvexe Ecken $(\varkappa = 0)$: $\alpha = \bar{\alpha}$.

[1]) Von Wiener (a. a. O. S. 16/17) nur für konvexe Polygone ausgesprochen, bei denen es auch für den Hefs'schen Artbegriff natürlich noch gilt (Brückner, a. a. O. S. 8/9).

[2]) Wiener, a. a. O., S. 19.

Ebenfalls analog zu dem obigen, stimmt, wenn eine vom Scheitel des körperlichen Ecks aus gezogene Gerade g existiert, welche für alle Ebenen des Ecks auf der gleichen Seite liegt, die Wienersche Definition mit der folgenden Definition überein:[1])

Wird die körperliche Ecke von der Geraden g aus auf einen g umschriebenen Kreiskegel projiziert, so wird dieser Kegel α mal überdeckt.

Oder, was dasselbe ist: Wenn man die körperliche Ecke auf eine dem Kegel einbeschriebene Kugel von deren Mittelpunkt aus projiziert, so wird die Umgebung der Projektion des Scheitels der Ecke α mal überdeckt.

Denn, wenn man Ecke und Kegel durch eine Ebene schneidet, so ist dies zurückgeführt auf das beim ebenen Polygon Gesagte.

Über die Bestimmung der Art bei den Polyedern endlich ist folgendes zu bemerken:

Hefs definiert die Art eines Vielflaches durch die Anzahl der von der Summe aller seiner Polarecken bedeckten Kugeln.[2]) Nach Wiener[3]) ist ein Vielflach von der Aten Art, wenn man in seinem Innern einen derartigen Punkt angeben kann, dafs jede durch ihn gelegte Ebene das Vielflach in einem Polygon Ater Art schneidet. Dies ist, wenn Punkte P existieren, die für sämtliche Polyederflächen auf derselben Seite liegen, identisch mit folgender Definition:

Wenn man von einem Punkt P das Polyeder auf eine diesem Punkt umschriebene Kugel projiziert, so wird die Kugel A mal überdeckt.[4])

Denn, wenn man durch P alle Ebenen legt, so wird jedesmal das Polyeder in einem Polygon geschnitten, welches den von der Ebene auf der Kugel ausgeschnittenen Kreis (wie jede Stelle der Kugel) A mal überdeckt.

Hefs[5]) hat aus seiner Definition folgende wichtige Formel abgeleitet:

$$2\overline{A} = \Sigma\bar{\alpha} + \Sigma\bar{a} - K - \Sigma k;$$

[1]) Von Wiener (a. a. O. S. 26) für konvexe Ecken ausgesprochen, bei denen es auch noch für den Hefs'schen Artbegriff gültig ist (Brückner, a. a. O. S. 124).

[2]) Brückner, a. a. O. S. 124; Hefs, Kugelteilung, S. 433.

[3]) Wiener, a. a. O. S. 16/17.

[4]) Von Wiener (a. a. O. S. 17) für konvexe Polyeder angegeben, bei denen dies auch für die Hefs'sche Art gilt.

[5]) Brückner, a. a. O. S. 124/125; Hefs, Über die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder, Schriften d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. zu Marburg (Kassel 1876), S. 13—16.

Dabei bedeutet:

$\Sigma\bar{\alpha}$ die Summe der Arten der körperlichen Ecken des Polyeders,

$\Sigma\bar{\bar{\alpha}}$ die Summe der Arten der Flächen des Polyeders,

K die Anzahl der Kanten,

Σk die Anzahl der überstumpfen Kantenwinkel.

Wir können aus unserer Definition eine analoge Formel ableiten (in ähnlicher Weise, wie dies Wiener für die regulären Polyeder getan hat[1]):

Man projiziere ein Begrenzungspolygon auf die Kugel; dann ist der Flächeninhalt des entstehenden sphärischen Polygons:

$$F = \frac{w - (n - 2a)\pi}{2\pi} \cdot \frac{\Theta}{2}$$

wenn n die Kantenzahl und a die Art des ebenen und des entstehenden sphärischen Polygons, w die Summe der Winkel des sphärischen Polygons und Θ die Kugeloberfläche bedeutet.

Dann ist $\Sigma F = A \cdot \Theta$ (die Kugel wird A mal überdeckt).

Also

$$\frac{\Theta}{4\pi} \cdot \Sigma (w - (n - 2a)\pi) = A \cdot \Theta,$$

d. h.

$$\frac{\Sigma w}{\pi} - \Sigma n + 2\Sigma a = 4A.$$

Da nun in jeder Kante zwei Begrenzungspolygone zusammenstofsen, so ist

$$\Sigma n = 2K.$$

Ferner ist

$$\frac{\Sigma w}{2\pi} \quad \Sigma\alpha.$$

Also

$$\Sigma\alpha + \Sigma a - K \quad 2A.$$

(Erweiterter Eulerscher Polyedersatz.)[2]

Wir vergleichen nun diese Formel mit der Hefs'schen Formel. Wenn wir in die Hefs'sche Formel eintragen:

$$\bar{\alpha} = \alpha + \varkappa$$

[1] Wiener, a. a. O. S. 31.

[2] Da dieser Polyedersatz (im Gegensatz zur Hefs'schen Formel) nicht von der Anzahl der überstumpfen Flächenwinkel abhängt, so gilt der Satz unmittelbar für Riemannsche Flächen, welche die Kugel mehrfach überdecken.

(hierbei ist zu beachten, dafs jeder überstumpfe Winkel zwei körperlichen Ecken angehört),

und

$$\bar{a} = a + k,$$

so nimmt die Hefs'sche Formel folgende Gestalt an:

$$2(\overline{A} - \Sigma\varkappa) = \Sigma\alpha + \Sigma a - K.$$

Deshalb ist

$$A = \overline{A} - \Sigma\varkappa,$$

wobei $\Sigma\varkappa$ die Anzahl der überstumpfen Flächenwinkel des Polyeders bedeutet.[1])

Indem wir diese Beziehung postulieren, auch für den Fall, dafs kein Punkt P vorhanden ist, legen wir unseren Artbegriff ebenso allgemein fest, wie den Hefs'schen. —

Wir können die abgeleitete Beziehung sofort anwenden, um für unsere gleichflächigen Polyeder unmittelbar aus einem Begrenzungspolygon den Zusammenhang zwischen A und $\overline{A}$ abzulesen. Wenn nämlich in der Begrenzungsfläche eines gleichflächigen Polyeders b Kanten vorhanden sind, an denen konkave Flächenwinkel liegen (die direkte Bestimmung dieser Kanten ergibt sich aus dem in § 4 Gesagten), so sind, da sich in jeder Kante zwei Begrenzungspolygone schneiden, im ganzen $\frac{b \cdot 48}{2}$ konkave Flächenwinkel vorhanden.

Also ist dann

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A + \Sigma\varkappa \\ &= A + b \cdot 24. \end{aligned}$$

Allgemein für ein gleichflächiges Polyeder, wenn M die Anzahl seiner Flächen ist:

$$\overline{A} = A + \frac{b \cdot M}{2}.$$

Soviel[2]) über den Artbegriff.[3])

[1]) A und $\overline{A}$ stimmen also für die konvexen Polyeder und nur für diese überein.

[2]) Vgl. im übrigen die historischen Bemerkungen über den Artbegriff und die Erweiterungen der Eulerschen Polyederformel in Brückner, a. a. O., vor allem S. 58 ff. und S. 177 ff.

[3]) Im folgenden wird bei der Bezeichnung einzelner Polyeder, deren Art nach der Hefs'schen Definition von der Wienerschen abweicht (d. h. also bei allen einzeln aufgezählten nichtkonvexen Polyedern) neben A auch $\overline{A}$ angegeben.

Wir wenden ihn nun als Einteilungsprinzip auf unsere gleichflächigen Polyeder an.

Es sind danach also zu Anfang dieses § alle gleichflächigen Polyeder erster Art mit direkt-symmetrischen Kanten abgeleitet; denn diese dürfen in jeder Zelle nur ein Flächenstück, also überhaupt nur eine Zellform enthalten. Die Polyeder höherer Art entstehen sämtlich durch Kombination der Körper erser Art. Denn die Aufgabe, alle möglichen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten zu bestimmen, fällt zusammen mit der Frage nach der Anzahl der Polygone, die, aus direkt-symmetrischen Kanten gebildet, in der Schnittfigur enthalten sind. Solche Polygone können aber nur durch Zusammensetzung der Zelldreiecke entstehen, da dies die kleinsten Elemente des aus den direkt-symmetrischen Kanten gebildeten vollständigen ebenen Netzes sind. Umgekehrt sieht man, dafs alle Kombinationen von Polyedern erster Art mit direkt-symmetrischen Kanten solche höherer Art ergeben. Denn die neuen Polyeder sind gleichflächig, da jede Zellform der ersten Polyeder so oft wiederholt wird, als die Anzahl der Flächen ist (48), und sie sind von höherer Art, da in jeder Zelle mehrere Flächenstücke (Zellformen) vorhanden sind, so dafs die eingeschriebene Kugel mehrfach überdeckt wird.

Die Körper der ersten Art mit direkt-symmetrischen Kanten mögen deshalb kurz Grundformen genannt werden.

Da irgend eine Kombination, in der dieselbe Grundform mehrmals enthalten ist, in ihrer Gestalt sich gar nicht unterscheidet von der Kombination, in der die besagte Grundform nur einmal auftritt, und da es uns gerade darum zu tun ist, einen Einblick in die Mannigfaltigkeit der Gestalten zu gewinnen, so ist es nötig, sich auf die einfachen Kombinationen zu beschränken.

Es ist nun die Art A eines gleichflächigen Polyeders gleich der Anzahl der zusammengefügten Grundformen; denn die konzentrische Kugel wird ebensooft vollständig bedeckt. Dies gilt jedoch nur für die geschlossenen und transgredienten Polyeder, dagegen nicht für die offenen Gestalten; denn für die letzteren verliert im allgemeinen die Definition der Art ihren Sinn, da die Projektion auf eine konzentrische Kugel in der Regel Lücken aufweist.

Demnach ist ganz allgemein für irgend eine Familie die Anzahl aller möglichen Polyeder einer gewissen Art: $\binom{n}{A}$, wenn n die Menge der zur Verfügung stehenden Grundformen bedeutet. Da nun

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n - 1 = 2^n - 1$$

ist, so beträgt die Anzahl sämtlicher Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten von irgend einer Familie:

$$2^n - 1.$$

Für die geschlossenen Polyeder ist $n = 15$ [bez. $13\,(+4)$ bei $mn = m + n$]; also wird die Anzahl aller möglichen geschlossenen gleichflächigen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten in Untergattung α und β des Hexakisoktaeders:

für $A =$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$$15 + 105 + 455 + 1365 + 3003 + 5005 + 6435 + 6435 + 5005 + 3003$$

11 12 13 14 15

$$+ 1365 + 455 + 105 + 15 + 1 = 2^{15} - 1 = 32767.$$

bez. in Untergattung γ:

für $A =$ 1 2 3 4 5

$$13\,(+4) + 78\,(+58) + 286\,(+394) + 715\,(+1665) + 1287\,(+4901)$$

6 7 8 9

$$+ 1716\,(+10660) + 1716\,(+17732) + 1287\,(+23023) + 715\,(+23595)$$

10 11 12 13 14

$$+ 286\,(+19162) + 78\,(+12298) + 13\,(+6175) + 1\,(+2379) + 0\,(+680)$$

15 16 17

$$+ 0\,(+136) + 0\,(+17) + 0\,(+1)$$

$$= 2^{13} - 1\,(+2^{17} - 2^{13}) = 8191\,(+122880)$$

zusammen $= 2^{17} - 1 = 131071.$

Dabei geben die in Klammern stehenden Zahlen die halbgeschlossenen Formen an, d. h. die Körper, von denen Eckpunkte im Unendlichen liegen.

Für die offenen bez. transgredienten Formen ergibt sich:

Anzahl der offenen Gestalten	ohne	geschl. Kernpolyeder	für	α u. β:	$2^{18}-1$	$=$	262143
				γ:	$2^{14}-1$	$=$	16383
„ „ „ „	mit	„ „ „		α u. β:	$2^{33}-2^{18}-2^{15}+1$	$=$	8 589 639 681
				γ:	$2^{31}-2^{14}-2^{17}+1$	$=$	2 147 336 193
„ „ „ „	überhaupt		für	α u. β:	$2^{33}-2^{15}$	$=$	8 589 901 824
				γ:	$2^{31}-2^{17}$	$=$	2 147 352 576
„ „	transgredienten Polyeder	ohne geschl. Kernpol.	für	α u. β:	$2^{9}-1$	$=$	511
				γ:	$2^{7}-1$	$=$	127
„ „ „ „	mit	„ „ „		α u. β:	$2^{24}-2^{15}-2^{9}+1$	$=$	16 743 937
				γ:	$2^{24}-2^{17}-2^{7}+1$	$=$	16 646 017
„ „ „ „	überhaupt		für	α u. β:	$2^{24}-2^{15}$	$=$	16 744 448
				γ:	$2^{24}-2^{17}$	$=$	16 646 144

Die Anzahl aller geschlossenen und transgredienten Polyeder zusammen beträgt immer:

$$2^{24}-1 = 16\,777\,215.$$

In den folgenden §§ sollen nunmehr die eigentlichen (geschlossenen) Polyeder eingehender untersucht werden; die uneigentlichen (transgredienten bez. offenen Gestalten) können umso eher unberücksichtigt bleiben, als die meisten Betrachtungen für sie keinen Sinn mehr haben.

§ 3.

Die allophänen Typen.

Es ist klar, dafs immer eine Anzahl von Polyedern denselben äufseren Anblick darbieten, dafs sie sich also nur in den Teilen unterscheiden, welche von der Aufsenfläche verdeckt sind. Da die Untersuchung spezieller Polyeder immer auf die Erkenntnis des Formenreichtums und auf die Möglichkeit der Darstellung der Formen abzielt, so wird unsere nächste Frage sein: Welches sind die möglichen Aufsenflächen? D. h.: Welche Mannigfaltigkeit des äufseren Anblicks bieten unsere Polyeder dar?

Alle Körper mit der gleichen Aufsenfläche mögen isophäne[1]) Polyeder genannt werden; Gestalten jedoch, deren Aufsenflächen verschieden sind, mögen allophäne[1]) Polyeder heifsen. Hierdurch werden zugleich unsere gleichflächigen Polyeder nach ihrem Aussehen in ein gewisses System gebracht.

Bevor man zur Beantwortung der genannten Frage schreiten kann, ist es nötig, sich darüber klar zu werden, wann Zellformen sich gegenseitig verdecken, wann sie sich schneiden. Eine Zellform verdeckt dann eine andere, wenn die erstere auf allen drei Zellachsen gröfsere (bez. gleiche) Abschnitte bestimmt wie die letztere. Zwei Zellformen durchdringen sich dagegen, wenn jede von ihnen auf irgend welchen Zellachsen die andere überragt. Man findet also die Zellformen, die von einer ganz bestimmten verdeckt werden, dadurch, dafs man diejenigen Abschnitte der Zellachsen kombiniert, welche kleiner (bez. gleich) sind wie die Abschnitte der gegebenen Form. Analog ergeben sich die Zellformen, die eine bestimmte Zellform schneiden,

[1]) Gebildet aus ἴσος bez. ἄλλος und φαίνομαι.

durch Kombination von kleineren mit gröfseren Abschnitten (wie die der gegebenen Zellform). In der folgenden Tabelle ist auf Grund des in § 1 S. 52—55 Abgeleiteten beides für die geschlossenen Zellformen durchgeführt. Dabei bedeutet „V“ „gröfser als . . .“

(Gegebene Zellform)	Zellachsenabschnitte	Verdeckte Zellformen	Schneidende Zellformen
1	$A - S_1 - ab$	—	—
2	$A - S_1 - ac$; $\overset{v}{(ab)}$	1	Alle Zellen um (ab), aufser 1: 3, 7, 9.
3	$B - S_1 - ab$; $\overset{v}{(A)}$	1	Alle Zellen um (A), aufser 1: 2, 7, 8, 11, 12, 14, 15.
4	$B - S_1 - bc$; $\overset{v}{(A)}$ $\overset{v}{\binom{ab}{ac}}$ $\left[\begin{matrix} a\bar{c}\ \text{III} \\ a\bar{b}\ \text{II} \end{matrix}\right]$	1, 2, 3	1. Alle Zellen um (A), aufser 1 u. 2: 7, 8, 11, 12, 14, 15. 2. Alle Zellen um (ab), aufser 1, 3 und dem schon erwähnten (7): 9. 3. Alle Zellen um (ac), aufser 2 u. (11): 5, 13. [4. Unter Bedingung III: Alle Zellen um $(a\bar{c})$, aufser (8 u. 14): {18, 30}.] [5. Unter Bedingung II: Alle Zellen um $(a\bar{b})$, aufser (12 u. 15): {22, 28}.]
5	$C - S_1 - ac$; $\overset{v}{\binom{A}{B}}$ $\overset{v}{(ab)}$	1, 2, 3	1. Alle Zellen um (A), aufser 1 u. 2: 7, 8, 11, 12, 14, 15. 2. Alle Zellen um (B), aufser 3: 4, 9, 10, 16, {23, 26, 29}. 3. Alle Zellen um (ab), aufser 1, 3, (7, 9): —
6	$C - S_1 - bc$; $\overset{v}{\binom{A}{B}}$ $\overset{v}{\binom{ab}{ac}}$ $\left[\begin{matrix} a\bar{c}\ \text{III} \\ a\bar{b}\ \text{II} \end{matrix}\right]$	1, 2, 3, 4, 5	1. Alle Zellen um (A), aufser 1 u. 2: 7, 8, 11, 12, 14, 15. 2. Alle Zellen um (B), aufser 3 u. 4: 9, 10, 16, {23, 26, 29}. 3. Alle Zellen um (ab), aufser 1, 3, (7, 9): —

Gegebene Zellform	Zellachsenabschnitte	Verdeckte Zellformen	Schneidende Zellformen
			4. Alle Zellen um (ac), aufser 2, 5, (11): 13.
			[5. Unter Bedingung III: Alle Zellen um $(a\bar{c})$, aufser (8 u. 14): {18, 30}.]
			[6. Unter Bedingung II: Alle Zellen um $(a\bar{b})$, aufser (12 u. 15): {22, 28}.]
7	$A - S_2 - ab$ $\overset{v}{(S_1)}$	1	Alle Zellen um (S_1), aufser 1: 2, 3, 4, 5, 6.
8	$A - S_2 - a\bar{c}$ $\overset{v}{(S_1)}$ $\overset{v}{\begin{pmatrix} ab \\ ac \end{pmatrix}}$ $[bc\,\mathrm{III}']$	1, 2, 7	1. Alle Zellen um (S_1), aufser 1 u. 2: 3, 4, 5, 6. 2. Alle Zellen um (ab), aufser 1, 7 u. (3): 9. 3. Alle Zellen um (ac), aufser 2 u. (5): 11, 13. [4. Bedingung III' ist für $mn < m + n$ immer identisch erfüllt; alle Zellen um (bc), aufser (4 u. 6): 16, 17.]
9	$B - S_2 - ab$ $\overset{v}{(A)}$ $\overset{v}{(S_1)}$	1, 3, 7	1. Alle Zellen um (A), aufser 1 u. 7: 2, 8, 11, 12, 14, 15. 2. Alle Zellen um (S_1), aufser 1, 3 u. (2): 4, 5, 6.
10	$B - S_2 - b\bar{c}$ $\overset{v}{(A)}$ $\overset{v}{(S_1)}$ $\overset{v}{\begin{pmatrix} ab \\ ac \\ bc \\ a\bar{c} \end{pmatrix}}$ $[a\bar{b}\,\mathrm{I}]$	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9	1. Alle Zellen um (A), aufser 1, 2, 7, 8: 11, 12, 14, 15. 2. Alle Zellen um (S_1), aufser 1, 2, 3, 4: 5, 6. 3. Alle Zellen um (ab), aufser 1, 3, 7, 9: — 4. Alle Zellen um (ac), aufser 2, (5 u. 11): 13. 5. Alle Zellen um (bc), aufser 4 u. (6): 16, 17.

Gegebene Zellform	Zellachsenabschnitte	Verdeckte Zellformen	Schneidende Zellformen
			6. Alle Zellen um $(a\bar{c})$, aufser 8 u. (14): {18, 30}.
			[7. Unter Bedingung I: Alle Zellen um $(a\bar{b})$, aufser (12 u. 15): {22, 28}.]
11	$A - S_3 - ac$ $\binom{\overset{\vee}{S_1}}{S_2}$ $(\overset{\vee}{a\bar{b}})$	1, 2, 7	1. Alle Zellen um (S_1), aufser 1 u. 2: 3, 4, 5, 6. 2. Alle Zellen um (S_2), aufser 7: 8, 9, 10, {18, 20}. 3. Alle Zellen um (ab), aufser 1, 7, (3, 9): —
12	$A - S_3 - a\bar{b}$ $\binom{\overset{\vee}{S_1}}{S_2}$ $\binom{\overset{\vee}{ab}}{ac}$ $a\bar{c}$ $[bc$ III′ $b\bar{c}$ I′$]$	1, 2, 7, 8, 11	1. Alle Zellen um (S_1), aufser 1 u. 2: 3, 4, 5, 6. 2. Alle Zellen um (S_2), aufser 7 u. 8: 9, 10, {18, 20}. 3. Alle Zellen um (ab), aufser 1, 2, 7, (9): — 4. Alle Zellen um (ac), aufser 2, 11, (5): 13. 5. Alle Zellen um $(a\bar{c})$, aufser 8, ({18}): 14, {30}. [6. Unter Bedingung III′ (für $\beta\gamma$ immer erfüllt): Alle Zellen um (bc), aufser (4 u. 6): 16, 17.] [7. Unter Bedingung I′: Alle Zellen um $(b\bar{c})$, aufser (10 u. {19}): {25, 26}.]
13	$C - S_3 - ac$ $\binom{\overset{\vee}{A}}{B}$ $\binom{\overset{\vee}{S_1}}{S_2}$ $(\overset{\vee}{ab})$	1, 2, 3, 5, 7, 9, 11	1. Alle Zellen um (A), aufser 1, 2, 7, 11: 8, 12, 14, 15. 2. Alle Zellen um (B), aufser 3, 9: 4, 10, 16, {23, 26, 29}. 3. Alle Zellen um (S_1), aufser 1, 2, 3, 5, (4): 6.

Gegebene Zellform	Zellachsenabschnitte	Verdeckte Zellformen	Schneidende Zellformen
			4. Alle Zellen um (S_2), aufser 7, 9, (8, 10): {18, 20}.
			5. Alle Zellen um (ab), aufser 1, 3, 7, 9: —
14 $(\alpha\gamma)!$	$A - S_4 - a\bar{c}$ $\overset{v}{\begin{pmatrix}S_1\\S_2\\S_3\end{pmatrix}}$ $\overset{v}{\begin{pmatrix}ab\\ac\end{pmatrix}}$ $[bc\,\mathrm{III}']$	1, 2, 7, 8, 11	1. Alle Zellen um (S_1), aufser 1 u. 2: 3, 4, 5, 6.
			2. Alle Zellen um (S_2), aufser 7 u. 8: 9, 10, {18, 20}.
			3. Alle Zellen um (S_3), aufser 11: 12, 13, {22, 24, 27}.
			4. Alle Zellen um (ab), aufser 1, 7, (3, 9): —
			5. Alle Zellen um (ac), aufser 2, 11, (5, 13): —
			[6. Unter Bedingung III' (für γ identisch erfüllt): Alle Zellen um (bc), aufser (4 u. 6): 16, 17.]
15 $(\alpha\gamma)!$	$A - S_4 - a\bar{b}$ $\overset{v}{\begin{pmatrix}S_1\\S_2\\S_3\end{pmatrix}}$ $\overset{v}{\begin{pmatrix}a\bar{b}\\ac\\a\bar{c}\end{pmatrix}}$ $\begin{bmatrix}bc\,\mathrm{II}'\\b\bar{c}\,\mathrm{I}'\end{bmatrix}$	1, 2, 7, 8, 11, 12, 14	1. Alle Zellen um (S_1), aufser 1 u. 2: 3, 4, 5, 6.
			2. Alle Zellen um (S_2), aufser 7 u. 8: 9, 10, {18, 20}.
			3. Alle Zellen um (S_3), aufser 11 u. 12: 13, {22, 24, 27}.
			4. Alle Zellen um (ab), aufser 1, 7, (3, 9): —
			5. Alle Zellen um (ac), aufser 2, 11, (5, 13): —
			6. Alle Zellen um $(a\bar{c})$, aufser 8, 14, ({18}): {30}.
			[7. Unter Bedingung II' (für γ identisch erfüllt): Alle Zellen um (bc), aufser (4 u. 6): 16, 17.]

Gegebene Zellform	Zellachsenabschnitte	Verdeckte Zellformen	Schneidende Zellformen
			[8. Unter Bedingung I′: Alle Zellen um $(b\bar{c})$, aufser (10 u. 20): {25, 26}.]
16 ($\beta\gamma$)!	$B - S_4 - bc$ $(\overset{v}{A})$ $\begin{pmatrix}\overset{v}{S_1}\\S_2\\S_3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\overset{v}{ab}\\ac\end{pmatrix}$ $\left[\begin{matrix}a\bar{c}\ \text{III}\\a\bar{b}\ \text{II}\end{matrix}\right]$ NB. III u. II für $\beta\gamma$ niemals erfüllt!	1, 2, 3, 4, 7, 9, 11	1. Alle Zellen um (A), aufser 1, 2, 7, 11: 8, 12, 14, 15. 2. Alle Zellen um (S_1), aufser 1, 2, 3, 4: 5, 6. 3. Alle Zellen um (S_2), aufser 7, 9, (8): 10, {18, 20}. 4. Alle Zellen um (S_3), aufser 11, (12): 13, {22, 24, 27}. 5. Alle Zellen um (ab), aufser 1, 3, 7, 9: — 6. Alle Zellen um (ac), aufser 2, 11, (5, 13): —
17 ($\beta\gamma$)!	$C - S_4 - bc$ $\begin{pmatrix}\overset{v}{A}\\B\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\overset{v}{S_1}\\S_2\\S_3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\overset{v}{ab}\\ac\end{pmatrix}$ $\left[\begin{matrix}a\bar{c}\ \text{III}\\a\bar{b}\ \text{II}\end{matrix}\right]$ NB. III u. II für $\beta\gamma$ niemals erfüllt!	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 16	1. Alle Zellen um (A), aufser 1, 2, 7, 11: 8, 12, 14, 15. 2. Alle Zellen um (B), aufser 3, 4, 9, 16: 10, {23, 26, 29}. 3. Alle Zellen um (S_1), aufser 1, 2, 3, 4, 5, 6: — 4. Alle Zellen um (S_2), aufser 7, 9, (8, 10): {18, 20}. 5. Alle Zellen um (S_3), aufser 11, 13, (12): {22, 24, 27}. 6. Alle Zellen um (ab), aufser 1, 3, 7, 9: — 7. Alle Zellen um (ac), aufser 2, 5, 11, 13: —

Alle geschlossenen Zellformen, welche von der gegebenen weder verdeckt noch geschnitten werden, verdecken diese natürlich selbst. Die angedeuteten Bedingungen haben folgende Bedeutung (s. S. 54/55):

$$\text{I: } b\bar{c} > a\bar{b}, \text{ d. h. } m > \frac{2n}{n+1} \qquad \text{I': } a\bar{b} > b\bar{c}, \text{ d. h. } \frac{2n}{n+1} > m$$

$$\text{II: } bc > a\bar{b}, \text{ d. h. } m > \frac{2n}{n-1} \qquad \text{II': } a\bar{b} > bc, \text{ d. h. } \frac{2n}{n-1} > m$$

$$\text{III: } bc > a\bar{c}, \text{ d. h. } n > \frac{2m}{m-1} \qquad \text{III': } a\bar{c} > bc, \text{ d. h. } \frac{2m}{m-1} > n.$$

Für $mn \leq m+n$, d. h. für $\frac{n}{n-1} \geq m$ bez. $\frac{m}{m-1} \geq n$ ist II' und III' identisch erfüllt, also II und III unmöglich.

Wenn die Zellformen 14 und 15 bez. 16 und 17 offen werden, so verliert das Verdecken bei ihnen seinen Sinn, da der Aufsen- bez. Innenraum nicht gekennzeichnet ist. —

Nunmehr kann zur Beantwortung der oben gestellten Frage übergegangen werden. Wenn die Aufsenfläche von m Zellformen gebildet wird, so besitzen alle Kombinationen mit denjenigen Formen, welche von den genannten m Zellformen verdeckt werden, die gleiche Aufsenfläche. Die Aufsenflächen, welche von m Zellformen gebildet werden, nennen wir vom m ten Grade. Die Typen der Aufsenflächen werden dann nach der Gradzahl eingeteilt. Es gilt ferner allgemein: Wenn m Zellformen in der Aufsenfläche vereinigt sind, so müssen alle $\binom{m}{m-1} = m$ Kombinationen dieser Zellformen zu je $m-1$ selbständig als Aufsenflächen existieren; denn keine dieser $m-1$ Zellformen kann durch eine andere von ihnen verdeckt werden, da ja eine Verdeckung selbst dann nicht stattfindet, wenn die m te Zelle noch hinzutritt. Demnach kann man umgekehrt aus den von $m-1$ Zellformen gebildeten Aufsenflächen alle aus m Zellformen zusammengesetzten unmittelbar ableiten:

Man nehme je zwei Aufsenflächen $(m-1)$ ten Grades, die in $m-2$ Zellformen übereinstimmen und vereinige beide zu einer Aufsenfläche m ten Grades. Sodann ist, auf Grund der als bekannt vorausgesetzten Aufsenflächen $(m-1)$ ten Grades zu kontrollieren, ob auch alle noch übrigen $m-2$ Kombinationen zu je $m-1$ der die fragliche Aufsenfläche m ten Grades bildenden Zellformen als selbständige Aufsenfläche $(m-1)$ ten Grades existieren. Dies stellt eine notwendige Bedingung für das Bestehen der Aufsenfläche m ten Grades dar.

Dieses Verfahren läfst sich nun in folgender Weise eindeutig, einfach und übersichtlich gestalten:

Das Symbol einer Aufsenfläche bestehe in einer Nebeneinanderstellung der Zeichen der Zellformen, welche diese Aufsenfläche bilden, und es sollen in dem Symbol die Zahlzeichen in ihrer natürlichen Reihenfolge, mit dem kleinsten anfangend, angeschrieben werden. Sodann mögen die Symbole der als bekannt vorausgesetzten Typen $(m-1)$ ten Grades selbst in lexikographischer Anordnung vorliegen, d. h. die Symbole, welche mit kleineren Zahlen beginnen, mögen den mit höheren Zahlen beginnenden Symbolen vorangehen, oder, was dasselbe ist, die in angegebener Weise aus den Zellzahlzeichen zusammengesetzten Symbole mögen, selbst als Zahlen gelesen, in natürlicher Reihenfolge angeschrieben sein. Dann bilden in der Reihe der Aufsenflächen vom $(m-1)$ ten Grad immer diejenigen, welche in den $m-2$ ersten Zellzeichen übereinstimmen, je eine Gruppe aufeinanderfolgender Glieder.

Wenn man nun das oben angegebene Verfahren der Bildung der Aufsenflächen m ten Grades nur für alle diese Gruppen durchführt, d. h. wenn man sich bei diesem Verfahren auf solche Paare von Aufsenflächen $(m-1)$ ten Grades beschränkt, die in den $m-2$ ersten Zellzeichen übereinstimmen, so erhält man schon alle möglichen Aufsenflächen m ten Grades.

Beweis.

Angenommen, man könne durch Behandlung eines Paares von Aufsenflächen $(m-1)$ ten Grades, die nicht in den $m-2$ ersten Zellzeichen übereinstimmen, zu einer neuen, im obigen nicht erhaltenen, Aufsenfläche m ten Grades gelangen. Dann könnte man die Zellzeichen des Symbols m ten Grades eindeutig in die natürliche Zahlenfolge bringen. Es müfsten dann erstens die $m-1$ ersten Zellformen dieses Symbols als Aufsenfläche $(m-1)$ ten Grades, zweitens die $m-2$ ersten Zellformen + die m te Zellform zusammen als eine (andere) Aufsenfläche $(m-1)$ ten Grades selbständig existieren. Dann haben wir aber hiermit zwei Aufsenflächen $(m-1)$ ten Grades, die in den $m-2$ ersten Zellzeichen ihres Symbols übereinstimmen, und wir

hätten von diesen ausgehend, unsere Aufsenfläche m ten Grades auch erhalten. Q. e. d.[1])

Da nun die oben angegebene Bedingung zwar notwendig, aber im allgemeinen noch nicht hinreichend ist, so mufs in jedem einzelnen Falle (wenigstens für die unter III, IV, V und VI aufgeführten Typen) untersucht werden, ob und wieweit, d. h. für welche Familien, die neuen Aufsenflächen existieren. Dies wird am einfachsten durch Betrachtung der Schnittfiguren in den drei Zellwandungen ausgeführt. Für den Fall, dafs die Spuren einer Zellform in diesen Schnittfiguren verdeckt werden, ist es möglich, dafs die betreffende Zellform selbst von der Aufsenfläche verschwindet. Man beachte hierbei: Eine Ebene wird nur dann von zwei anderen innerhalb der Zelle verdeckt, wenn in den Zellwandungen die beiden Spurpunkte der Schnittlinie dieser zwei Ebenen oberhalb der betreffenden Spuren der ersten Ebene liegen. Hierauf lassen sich alle Vorkommnisse zurückführen und man erhält in sehr einfacher Weise die Kriterien des Verschwindens für die einzelnen Typen.

Zwei von den einfachsten Fällen aus dem folgenden mögen zur Erläuterung dienen:

III, 1 ($\equiv 2 \cdot 3 \cdot 7$): Da in II sowohl (2 und 3) als (2 und 7) wie auch (3 und 7) als Aufsenflächen auftreten, so ist $(2 \cdot 3 \cdot 7)$ als Aufsenfläche, die von drei Zellformen gebildet wird, möglich und näher zu untersuchen. Man schreibe deshalb das folgende Schema an:

	R	S	T
2	A	S_1	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{c}$
3	$\boldsymbol{B}$	S_1	$a\,b$
7	A	$\boldsymbol{S}_2$	$a\,b$

Man kennzeichne in jeder Vertikalreihe den gröfsten Wert; da in unserem Falle auch jeder Horizontalreihe ein solcher zugehört, so sind immer alle drei Zellen sichtbar.

[1]) Wenn man die Paare der in denselben $m-2$ ersten Zeichen übereinstimmenden Symbole $(m-1)$ ten Grades so bildet, dafs man zuerst das erste derselben mit jedem der folgenden, dann das zweite derselben mit jedem der folgenden usw. vereinigt, so hat man noch den Vorteil, dafs sich die Typen m ten Grades von selbst in lexikographischer Anordnung ergeben (da ja auch die $m-2$ ersten Zeichen, für sich betrachtet, in ihrer ursprünglichen Reihenfolge bleiben).

Würde dies nicht oder nicht immer der Fall sein, wie z. B. bei III, 4 ($= 4 \cdot 5 \cdot 8$):

	R	S	T	
4	B	S_1	$\boldsymbol{b\,c}$	
5	$\boldsymbol{C}$	S_1	$a\,c$	wechselnd
8	A	$\boldsymbol{S_2}$	$\boldsymbol{a\,\bar{c}}$	

so würde man sich etwa die Schnittfigur mit den drei Zellwandungen zeichnen (bei einiger Übung kann man das Nötige unmittelbar aus dem Schema ablesen). Man sieht dann sofort, dafs für $a\bar{c} > bc$ die Zellform 4 in RS und ST immer verdeckt wird, in RT dagegen nur dann, wenn 4 unter oder in den Schnittpunkt von 5 und 8 fällt. Man braucht also nur zu berechnen, wann die drei Spurlinien in RT sich in einem Punkte scheiden, um sofort das Kriterium für das Verdecktwerden von Zellform 4 angeben zu können.

Diese Untersuchungen, von denen im folgenden nur die Resultate, eben jene Kriterien, mitgeteilt werden, zeigen, dafs alle auf Grund der genannten Bedingung in III, IV, V und VI abgeleiteten Aufsenflächen wirklich existieren, wenn auch häufig nur für einen Teil der Familien. Für andere Familien werden dann irgend welche Zellformen solcher Aufsenflächen verdeckt, so dafs blofs die isophänen Polyeder eines weniger zusammengesetzten Typus vermehrt werden, ohne dafs jedoch neue allophäne Typen dabei entständen; (denn alle Kombinationen der m Formen zu $(m-1)$, $(m-2)$ ... sind schon vorausgesetzt).

In den folgenden Zusammenstellungen soll nunmehr unter Benutzung der oben angegebenen Tabelle des Verdeckens und Schneidens die Mannigfaltigkeit der Aufsenflächen, also der allophänen Typen erörtert werden; dabei ist wieder zu beachten, dafs

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ ist.}$$

I.

Die Aufsenfläche wird von einer einzigen Zellform gebildet.

Nr.	Zellform d. Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Nr.	Zellform d. Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
1	1	—	$2^0 = 1$	10	10	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9	$2^7 = 128$
2	2	1	$2^1 = 2$	11	11	1, 2, 7	$2^3 = 8$
3	3	1	$2^1 = 2$	12	12	1, 2, 7, 8, 11	$2^5 = 32$
4	4	1, 2, 3	$2^3 = 8$	13	13	1, 2, 3, 5, 7, 9, 11	$2^7 = 128$
5	5	1, 2, 3	$2^3 = 8$	14	14($\alpha\gamma$)	1, 2, 7, 8, 11	$2^5 = 32$
6	6	1, 2, 3, 4, 5	$2^5 = 32$	15	15($\alpha\gamma$)	1, 2, 7, 8, 11, 12, 14	$2^7 = 128$
7	7	1	$2^1 = 2$	16	16($\beta\gamma$)	1, 2, 3, 4, 7, 9, 11	$2^7 = 128$
8	8	1, 2, 7	$2^3 = 8$	17	17($\beta\gamma$)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 16	$2^{11} = 2048$
9	9	1, 3, 7	$2^3 = 8$				

Die hierhergehörigen Körper bieten den Anblick von Grundformen dar. Als Gesamtzahl dieser Polyeder ergibt sich also:

für die Untergattung α: 527,
„ „ „ β: 2543,
„ „ „ γ: 2703, wovon jedoch 2336 nur halbgeschlossen sind.

II.

Die Aufsenfläche wird von zwei Zellformen gebildet.

Aus der ersten Tabelle dieses § unmittelbar zu entnehmen. —

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
1	2 u. 3	1	$2^1 = 2$
2	2 u. 7	1	$2^1 = 2$
3	2 u. 9	1, 3, 7	$2^3 = 8$
4	3 u. 7	1	$2^1 = 2$
5	3 u. 8	1, 2, 7	$2^3 = 8$
6	3 u. 11	1, 2, 7	$2^3 = 8$
7	3 u. 12	1, 2, 7, 8, 11	$2^5 = 32$

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
8	4 u. 5	1, 2, 3	$2^3 = 8$
9	4 u. 7	1, 2, 3	$2^3 = 8$
10	4 u. 8	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$
11	4 u. 9	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$
12	4 u. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$
13	4 u. 12	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$
14	4 u. 13	1, 2, 3, 5, 7, 9, 11	$2^7 = 128$
15	5 u. 7	1, 2, 3	$2^3 = 8$
16	5 u. 8	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$
17	5 u. 9	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$
18	5 u. 10	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9	$2^7 = 128$
19	5 u. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$
20	5 u. 12	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$
21	6 u. 7	1, 2, 3, 4, 5	$2^5 = 32$
22	6 u. 8	1, 2, 3, 4, 5, 7	$2^6 = 64$
23	6 u. 9	1, 2, 3, 4, 5, 7	$2^6 = 64$
24	6 u. 10	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9	$2^8 = 256$
25	6 u. 11	1, 2, 3, 4, 5, 7	$2^6 = 64$
26	6 u. 12	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11	$2^8 = 256$
27	6 u. 13	1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11	$2^8 = 256$
28	8 u. 9	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$
29	8 u. 11	1, 2, 7	$2^3 = 8$
30	8 u. 13	1, 2, 3, 5, 7, 9, 11	$2^7 = 128$
31	9 u. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$
32	9 u. 12	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$
33	10 u. 11	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9	$2^7 = 128$
34	10 u. 12	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$
35	10 u. 13	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$
36	12 u. 13	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$
37	3 u. 14 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 7, 8, 11	$2^5 = 32$
38	4 u. 14 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$
39	5 u. 14 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$
40	6 u. 14 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11	$2^8 = 256$
41	9 u. 14 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$
42	10 u. 14 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$
43	12 u. 14 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 7, 8, 11	$2^5 = 32$
44	13 u. 14 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$
45	3 u. 15 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 7, 8, 11, 12, 14	$2^7 = 128$
46	4 u. 15 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 3, 7, 8, 11, 12, 14	$2^8 = 256$
47	5 u. 15 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 3, 7, 8, 11, 12, 14	$2^8 = 256$

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
48	6 u. 15 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 14	$2^{10} = 1024$
49	9 u. 15 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 3, 7, 8, 11, 12, 14	$2^{8} = 256$
50	10 u. 15 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{10} = 1024$
51	13 u. 15 ($\alpha\gamma$)	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{10} = 1024$
52	5 u. 16 ($\beta\gamma$)	1, 2, 3, 4, 7, 9, 11	$2^{7} = 128$
53	6 u. 16 ($\beta\gamma$)	1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11	$2^{8} = 256$
54	8 u. 16 ($\beta\gamma$)	1, 2, 3, 4, 7, 9, 11	$2^{7} = 128$
55	10 u. 16 ($\beta\gamma$)	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^{8} = 256$
56	12 u. 16 ($\beta\gamma$)	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^{8} = 256$
57	13 u. 16 ($\beta\gamma$)	1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11	$2^{8} = 256$
58	8 u. 17 ($\beta\gamma$)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 16	$2^{11} = 2048$
59	10 u. 17 ($\beta\gamma$)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 16	$2^{12} = 4096$
60	12 u. 17 ($\beta\gamma$)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 16	$2^{12} = 4096$
61	14 u. 16 (γ)	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^{8} = 256$
62	15 u. 16 (γ)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 16	$2^{12} = 4096$
63	14 u. 17 (γ)	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{10} = 1024$
64	15 u. 17 (γ)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16	$2^{14} = 16384$

Gesamtzahl:

für Untergattung α: 51 allophäne Typen mit 7934 Polyedern,
„ „ β: 45 „ „ „ 14462 „ ,
„ „ γ: Alle 64 „ „ „ 41214 „ , wovon jedoch 38272 nur halbgeschlossen sind.

Die nur für einige Familien hierhergehörigen Polyeder, welche aus Körpern mit komplizierterer Aufsenfläche durch Verdecktwerden einzelner Teile hervorgehen, siehe bei den betreffenden Gruppen höheren Grades. Die Anzahl der allophänen Typen wird bei dieser Verkleinerung des Grades nicht vermehrt. (Das Gleiche gilt auch für III, IV und V!)

III.

Die Aufsenfläche wird von drei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Eine der drei Zellformen der Aufsenfläche wird verdeckt, wenn	Die verdeckte Zellform	Die Aufsenfläche geht über in den Typus
1	2. 3. 7	1	$2^1 = 2$	—	—	—
2	3. 8. 11	1, 2, 7	$2^3 = 8$	—	—	—
3	4. 5. 7	1, 2, 3	$2^3 = 8$	—	—	—
4	4. 5. 8	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	$m \leqq \frac{n(n+1)}{n^2-n+2}$	4	II, 16
5	4. 5. 9	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	—	—	—
6	4. 5. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	—	—	—
7	4. 5. 12	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	$nm(n-1)(m-1) < n^2 - m^2$	4	II, 20
8	4. 8. 9	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	—	—	—
9	4. 8. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	$\frac{m(m+1)}{m-1} \leqq n$	8	II, 12
10	4. 8. 13	1, 2, 3, 5, 7, 9, 11	$2^7 = 128$	$m \leqq \frac{n(n+1)}{n^2-n+2}$	4	II, 30
				$\frac{m(m+1)}{m-1} \leqq n$	8	II, 14
11	4. 9. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	—	—	—
12	4. 9. 12	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	—	—	—
13	4. 12. 13	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	$mn(n-1)(m-1) < n^2 - m^2$	4	II, 36
14	5. 8. 9	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	—	—	—
15	5. 8. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	—	—	—
16	5. 9. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	$nm(m+1) \leqq n^2 + m^2$	9	II, 19
17	5. 9. 12	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	$nm(m+1) \leqq n^2 + m^2$	9	II, 20
18	5. 10. 11	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9	$2^7 = 128$	—	—	—
19	5. 10. 12	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	$mn(m+1+nm-n) \leqq n^2 + m^2$	10	II, 20
20	6. 8. 9	1, 2, 3, 4, 5, 7	$2^6 = 64$	—	—	—
21	6. 8. 11	1, 2, 3, 4, 5, 7	$2^6 = 64$	$\frac{m(m+1)}{m-1} \leqq n$	8	II, 25
22	6. 8. 13	1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11	$2^8 = 256$	$\frac{m(m+1)}{m-1} \leqq n$	8	II, 27
23	6 9. 11	1, 2, 3, 4, 5, 7	$2^6 = 64$	$nm(m+1) \leqq n^2 + m^2$	9	II, 25
24	6. 9. 12	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11	$2^8 = 256$	$nm(m+1) \leqq n^2 + m^2$	9	II, 26
25	6. 10. 11	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9	$2^8 = 256$	—	—	—
26	6. 10. 12	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	$mn(n+m+1) \leqq 2n^2 + m^2$	10	II, 26
27	6. 10. 13	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—
28	6. 12. 13	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Eine der drei Zellformen der Aufsenfläche wird verdeckt, wenn	Die verdeckte Zellform	Die Aufsenfläche geht über in den Typus	
29	8. 9. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	—	—	—	
30	10. 12. 13	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	$nm(m+1+mn-n) \leq n^2+m^2$	10	II, 36	
31	3. 12. 14	1, 2, 7, 8, 11	$2^5 = 32$	—	—	—	nur für Untergattung α und γ!
32	4. 5. 14	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	$m \leq \frac{n(n+1)}{n^2-n+2}$	4	II, 39	
33	4. 9. 14	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	—	—	—	
34	4. 12. 14	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	$n^2+m^2 \leq nm(m-1)$	12	II, 38	
35	4. 13. 14	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	$m \leq \frac{n(n+1)}{n^2-n+2}$	4	II, 44	
36	5. 9. 14	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	$m^2 \leq n$	9	II, 39	
37	5. 10. 14	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	—	—	—	
38	5. 12. 14	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	—	—	—	
39	6. 9. 14	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11	$2^8 = 256$	$m^2 \leq n$	9	II, 40	
40	6. 10. 14	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
41	6. 12. 14	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11	$2^8 = 256$	$n^2+m^2 < nm(m-1)$	12	II, 40	
42	6. 13. 14	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
43	9. 12. 14	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	—	—	—	
44	10. 12. 14	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	$n \leq m^2$	12	II, 42	
45	10. 13. 14	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
46	12. 13 14	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	—	—	—	
47	4. 5. 15	1, 2, 3, 7, 8, 11, 12, 14	$2^8 = 256$	$nm(n-1)(m-1) < n^2-m^2$	4	II, 47	
48	4. 9. 15	1, 2, 3, 7, 8, 11, 12, 14	$2^8 = 256$	—	—	—	
49	4. 13. 15	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{10} = 1024$	$nm(n-1)(m-1) \leq n^2-m^2$	4	II, 51	
50	5. 9. 15	1, 2, 3, 7, 8, 11, 12, 14	$2^8 = 256$	$m^2 \leq n$	9	II, 47	
51	5. 10. 15	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{10} = 1024$	$mn(m+1+mn-n) \leq n^2+m^2$	10	II, 47	
52	6. 9. 15	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 14	$2^{10} = 1024$	$m^2 \leq n$	9	II, 48	
53	6. 10. 15	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{11} = 2048$	$nm(n+m+1) \leq 2n^2+m^2$	10	II, 48	
54	6. 13. 15	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{11} = 2048$	—	—	—	
55	10. 13. 15	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{11} = 2048$	$nm(m+1+mn-n) \leq n^2+m^2$	10	II, 51	
56	5. 8. 16	1, 2, 3, 4, 7, 9, 11	$2^7 = 128$	—	—	—	n. f. Untergattung β u. γ!
57	5. 10. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	—	—	—	
58	5. 12. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	—	—	—	
59	6. 8. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11	$2^8 = 256$	—	—	—	
60	6. 10. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
61	6. 12. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
62	6. 13. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11	$2^8 = 256$	—	—	—	
63	8. 13. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11	$2^8 = 256$	—	—	—	

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Eine der drei Zellformen der Aufsenfläche wird verdeckt, wenn	Die verdeckte Zellform	Die Aufsenfläche geht über in den Typus	
64	10. 12. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	$2(n^2 - m^2) \leq mn(n-1)$	12	II, 55	n. f. Unterg. β u. γ!
65	10. 13. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
66	12. 13. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
67	10. 12. 17	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 16	$2^{12} = 4096$	$nm(n+m+1) \leq 2n^2 + m^2$	10	II, 60	
				$2(n^2 - m^2) \leq mn(n-1)$	12	II, 59	
68	5. 14. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	—	—	—	nur für Untergattung γ!
69	6. 14. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
70	10. 14. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	—	—	—	
71	12. 14. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	—	—	—	
72	13. 14. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
73	5. 15. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{10} = 1024$	—	—	—	
74	6. 15. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{11} = 2048$	—	—	—	
75	10. 15. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{10} = 1024$	—	—	—	
76	13. 15. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{11} = 2048$	—	—	—	
77	10. 14. 17	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 16	$2^{12} = 4096$	—	—	—	
78	12. 14. 17	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 16	$2^{12} = 4096$	—	—	—	
79	10. 15. 17	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16	$2^{14} = 16384$	$m \leq \frac{4}{3}$	10	II, 64	

Gesamtzahl:

für Untergattung α: 55 allophäne Typen mit 17618 Polyedern,
„ „ β: 42 „ „ „ 11954 „ ,
„ „ γ: Alle 79 „ „ „ 57938 „ , wovon jedoch 53792 nur halbgeschlossen sind.

Doch können nicht alle nebeneinander bestehen, sondern nur, soweit die angegebenen Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden können. 44 ($n > m^2$) und 36, 39, 50, 52 ($m^2 > n$) schliefsen sich immer gegenseitig aus. In Untergattung β können alle Bedingungen gleichzeitig befriedigt werden. —

Im allgemeinen treffen sich die drei Zellformen, wenn sie alle an der Bildung der Aufsenfläche beteiligt sind, immer in einem Punkt. Nur in den folgenden Fällen mufs noch eine Bedingung erfüllt sein:

Bei	18, 19, 25, 26	muſs	$n^2 + m^2 \geq nm\,(m+1)$	sein,
„	37, 40, 51, 53	„	$n \geq m^2$	„ ,
„	56 und 63	„	$\frac{n\,(n+1)}{n^2-n+2} \geq m$	„ ,
„	58 „ 66	„	$n^2 - m^2 \geq nm\,(n-1)\,(m-1)$	„ ,
„	68 „ 72	„	$n > 2\,m$	„ ,
„	73 „ 76	„	$2\,n \geq mn + 1$	„ ,

wenn die drei sichtbaren Zellformen einen Punkt gemeinsam haben sollen. Wenn hierbei „=“ gilt, dann liegt der Punkt in einer der Zellwandungen.

Dies alles kann man ebenfalls fast unmittelbar aus dem Schema oder den in den Zellwandungen gelegenen Schnittfiguren entnehmen: Wenn nämlich drei Ebenen ihren Schnittpunkt innerhalb der Zelle haben sollen, so müssen in den Zellwandungen die zwei Schnittpunkte der Schnittlinie der beiden ersten Ebenen einmal oberhalb und einmal unterhalb der betreffenden Spuren der dritten Ebene gelegen sein.

IV.

Die Aufsenfläche wird von vier Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Eine oder mehrere der vier Zellformen der Aufsenfläche werden verdeckt, wenn	Die verdeckte Zellform	Die Aufsenfläche geht über in den Typus
1	4. 5. 8. 9	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	$m \leq \frac{n\,(n+1)}{n^2-n+2}$	4	III, 14
2	4. 5. 8. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	$m \leq \frac{n\,(n+1)}{n^2-n+2}$	4	III, 15
				$\frac{m\,(m+1)}{m-1} < n$	8	III, 6
3	4. 5. 9. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	$nm\,(m+1) \leq n^2 + m^2$	9	III, 6
4	4. 5. 9. 12	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	$nm\,(n-1)\,(m-1) \leq n^2 - m^2$	4	III, 17
				$nm\,(m+1) \leq n^2 + m^2$	9	III, 7
				Beide Bedingungen gleichz. erfüllt	4 u. 9	II, 20
5	4. 8. 9. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	$\frac{m\,(m+1)}{m-1} \leq n$	8	III, 11
6	5. 8. 9. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	$nm\,(m+1) < n^2 + m^2$	9	III, 15

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Eine oder mehrere der vier Zellformen der Aufsenfläche werden verdeckt, wenn	Die verdeckte Zellform	Die Aufsenfläche geht über in den Typus	
7	6. 8. 9. 11	1, 2, 3, 4, 5, 7	$2^6 = 64$	$\frac{m(m+1)}{m-1} \leqq n$	8	III, 23	
				$mn(m+1) \leqq n^2 + m^2$	9	III, 21	
				Beide Bedingungen gleichz. erfüllt	8 u. 9	II, 25	
8	6. 10. 12. 13	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	$nm(n+m+1) \leqq 2n^2 + m^2$	10	III, 28	
9	4. 5. 9. 14	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	$m \leqq \frac{n(n+1)}{n^2 - n + 2}$	4	III, 36	nur für Untergattung α und γ!
				$m^2 \leqq n$	9	III, 32	
				Beide Bedingungen gleichz. erfüllt	4 u. 9	II, 39	
10	4. 5. 12. 14	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	$nm(n-1)(m-1) \leqq n^2 - m^2$	4	III, 38	
				$n^2 + m^2 \leqq nm(m-1)$	12	III, 32	
11	4. 9. 12. 14	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	$n^2 + m^2 \leqq nm(m-1)$	12	III, 33	
12	4. 12. 13. 14	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	$nm(n-1)(m-1) \leqq n^2 - m^2$	4	III, 46	
				$n^2 - m^2 \leqq nm(m-1)$	12	III, 35	
13	5. 9. 12. 14	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	$m^2 \leqq n$	9	III, 38	
14	5. 10. 12. 14	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	$nm(m+1+mn-n) \leqq n^2 + m^2$	10	III, 38	
				$n \leqq m^2$	12	III, 37	
15	6. 9. 12. 14	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11	$2^8 = 256$	$m^2 < n$	9	III, 41	
				$n^2 + m^2 \leqq nm(m-1)$	12	III, 39	
16	6. 10. 12. 14	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	$nm(n+m+1) \leqq 2n^2 + m^2$	10	III, 41	
				$n \leqq m^2$	12	III, 40	
17	6. 10. 13. 14	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
18	6. 12. 13. 14	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	$n^2 + m^2 \leqq nm(m-1)$	12	III, 42	
19	10. 12. 13. 14	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	$nm(m+1+mn-n) \leqq n^2 + m^2$	10	III, 46	
				$n \leqq m^2$	12	III, 45	
20	4. 5. 9. 15	1, 2, 3, 7, 8, 11, 12, 14	$2^8 = 256$	$mn(n-1)(m-1) < n^2 + m^2$	4	III, 50	
				$m^2 \leqq n$	9	III, 47	
				Beide Bedingungen gleichz. erfüllt	4 u. 9	II, 47	
21	6. 10. 13. 15	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{11} = 2048$	$mn(n+m+1) \leqq 2n^2 + m^2$	10	III, 54	
22	5. 10. 12. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	$mn(m+1+mn-n) \leqq n^2 + m^2$	10	III, 58	nur für Untergattung β u. γ!
				$2(n^2 - m^2) < nm(n-1)$	12	III, 57	
23	6. 8. 13. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11	$2^8 = 256$	—	—	—	
24	6. 10. 12. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	$mn(n+m+1) \leqq 2n^2 + m^2$	10	III, 61	
				$2(n^2 - m^2) < mn(n-1)$	12	III, 60	
25	6. 10. 13. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
26	6. 12. 13. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
27	10. 12. 13. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	$nm(m+1+mn-n) \leqq n^2 + m^2$	10	III, 66	
				$2(n^2 - m^2) < mn(n-1)$	12	III, 65	

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Eine oder mehrere der vier Zellformen der Aufsenfläche werden verdeckt, wenn	Die verdeckte Zellform	Die Aufsenfläche geht über in den Typus	
28	5. 10. 14. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	—	—	—	
29	5. 12. 14. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	—	—	—	
30	6. 10. 14. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
31	6. 12. 14. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
32	6. 13. 14. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
33	10. 12. 14. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	$1 \leq m\,(m-1)$	12	III, 70	nur für Untergattung γ!
34	10. 13. 14. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
35	12. 13. 14. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
36	5. 10. 15. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{10} = 1024$	$m\,(m-1) \leq 3$	10	III, 73	
37	6. 10. 15. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{11} = 2048$	$m \leq \frac{4}{3}$	10	III, 74	
38	6. 13. 15. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{11} = 2048$	—	—	—	
39	10. 13. 15. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8. 9, 11, 12, 14	$2^{11} = 2048$	$m\,(m-1) < 3$	10	III, 76	
40	10. 12. 14. 17	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 16	$2^{12} = 4096$	$1 \leq m\,(m-1)$	12	III, 77	
				$m < \frac{4}{3}$	10	III, 78	

Gesamtzahl:

für Untergattung α: 21 allophäne Formen mit 6096 Polyedern,
„ „ β: 14 „ „ „ 3280 „ ,
„ „ γ: 40 „ „ „ 23248 „ , wovon jedoch 22528 nur halbgeschlossen sind.

Es können jedoch nicht alle nebeneinander bestehen, sondern nur, soweit die angegebenen Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden können. 14, 16, 19, 33, 40 ($n > m^2$) und 9, 13, 15, 20 ($m^2 > n$) schliefsen sich gegenseitig aus; dagegen können die Bedingungen der Untergattung β) alle gleichzeitig befriedigt werden.

V.

Die Aufsenfläche wird von fünf Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Eine oder mehrere der Zellformen der Aufsenfläche werden verdeckt, wenn	Die verdeckte Zellform	Die Aufsenfläche geht über in den Typus	
1	4. 5. 8. 9. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	a) $m \leqq \frac{n(n+1)}{n^2-n+2}$	4	IV, 6	
				b) $\frac{m(m+1)}{m-1} \leqq n$	8	IV, 3	
				c) $mn(m+1) \leqq n^2+m^2$	9	IV, 2	
				a) u. c) gleichzeitig erfüllt	4 u. 9	III, 15	
				b) u. c) gleichzeitig erfüllt	8 u. 9	III, 6	
2	4. 5. 9. 12. 14	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	a) $mn(n-1)(m-1) \leqq n^2-m^2$	4	IV, 13	nur für Untergattung α u. γ!
				b) $n^2+m^2 \leqq nm(m-1)$	12	IV, 9	
				c) $m^2 \leqq n$	9	IV, 10	
				a) u. c) gleichzeitig erfüllt	4 u. 9	III, 38	
3	6. 10. 12. 13. 14	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	$mn(n+m+1) \leqq 2n^2+m^2$	10	IV, 18	
				$n < m^2$	12	IV, 17	
4	6. 10. 12. 13. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	$mn(n+m+1) \leqq 2n^2+m^2$	10	IV, 26	n. f. Unterg. β u. γ!
				$2(n^2-m^2) \leqq mn(n-1)$	12	IV, 25	
5	5. 10. 12. 14. 16	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11	$2^8 = 256$	$m(m-1) \leqq 3$	10	IV, 29	nur für Untergattung γ!
				$1 < m(m-1)$	12	IV, 28	
6	6. 10. 12. 14. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	$m \leqq \frac{4}{3}$	10	IV, 31	
				$1 < m(m-1)$	12	IV, 30	
7	6. 10. 13. 14. 15	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
8	6. 12. 13. 14. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	—	—	—	
9	10. 12. 13. 14. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	$m(m-1) \leqq 3$	10	IV, 35	
				$1 \leqq m(m-1)$	12	IV, 34	
10	6. 10. 13. 15. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14	$2^{11} = 2048$	$m(m-1) < 3$	10	IV, 38	

Gesamtzahl:

für Untergattung α: 3 allophäne Typen mit 592 Polyedern,
„ „ β: 2 „ „ „ 528 „ ,
„ „ γ: 10 „ „ „ 5456 „ , wovon 5440 halbgeschlossen sind.

Von den angegebenen Bedingungen schliefsen sich jedoch gegenseitig aus: $m^2 > n$ [2] und $n > m^2$ bez. $1 > m\,(m-1)$ [3, 5, 6, 9].

VI.

Die Aufsenfläche wird von sechs Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Eine der Zellformen der Aufsenfläche wird verdeckt, wenn	Die verdeckte Zellform	Die Aufsenfläche geht über in den Typus	
1	6. 10. 12. 13. 14. 16	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11	$2^9 = 512$	$m \leq \frac{4}{3}$	10	V, 8	nur für Untergattung γ!
				$1 \leq m\,(m-1)$	12	V, 7	

Dies ist die einzige von sechs Zellformen gebildete Aufsenfläche. —

Im ganzen existieren also

für Untergattung α: 145 allophäne Typen mit 32767 Polyedern,
„ „ β: 118 „ „ „ 32767 „ ,
„ „ γ: 211 „ „ „ 131071 „ ,
davon 123 „ „ „ 122880 „ nur halbgeschlossen.

Die Zahl der Polyeder ist für jede Untergattung nach § 2 konstant; dagegen können die allophänen Typen nur soweit bestehen, als die angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Die Bedingungen der Untergattung β alle gleichzeitig zu befriedigen, ist möglich. Jedoch schliefsen sich die folgenden Typen von α bez. γ immer gegenseitig aus:

von α: III, 44; IV, 14, 16, 19; V, 3 $(n > m^2)$
und III, 36, 39, 50, 52; IV, 9, 13, 15, 20; V, 2 $(m^2 > n)$.
von γ: III, 44; IV, 14, 16, 19, 33, 40; V, 3, 5, 6, 9; VI, 1 $(1 > m\,(m-1))$
und III, 7, 13, 36, 39, 47, 49, 50, 52; IV, 4, 9, 10, 12, 13, 15, 20; V, 2 $(m\,(m-1) > 1)$.

Es wird also das Maximum:

für Untergattung α: 140 allophäne Typen,
„ „ γ: 200 „ „ , davon 112 halbgeschlossen.

Einige wenige charakteristische Beispiele der Typen sind in den Figuren 14—22 dargestellt. Weitere Beispiele (für das Hexakisoktaeder sowie für die anderen Polyedergattungen) findet man unter den Abbildungen der beiden auf S. 45 u. 47 angegebenen Monographien von Brückner.

§ 4.

Die konvexen Polyeder.

Wir wollen nunmehr zur vollständigen Ableitung der konvexen gleichflächigen zur Hexakisoktaedergattung gehörenden Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten übergehen. „Ein Vielflach heifst konvex, wenn jeder seiner Flächenwinkel kleiner als π ist (die Ergänzungswinkel also sämtlich gröfser als π), nicht konvex, wenn auch nur ein Flächenwinkel überstumpf ist.“[1]) Die Gröfse der Kantenwinkel braucht gar nicht berücksichtigt zu werden.

Da die beiden in einer direkt-symmetrischen Kante zusammenstofsenden Flächen ganz gleichartig sind, so ist es klar, dafs schon die Eigenschaften einer dieser Flächen ein Kriterium für die Konvexität des Flächenwinkels liefern müssen. So finden wir:

Der Flächenwinkel an einer direkt-symmetrischen Kante ist dann und nur dann konvex, wenn der Berührungspunkt der Fläche mit der einbeschriebenen Kugel auf derjenigen Seite der Kante liegt, welche dem zum Polyeder gehörigen Teile der Fläche zugewendet ist.

[1]) Brückner, Vielecke und Vielflache, S. 46. — Auf S. 163/164 sagt Brückner: „... Ist die dort und fernerhin mit k bezeichnete Zahl überstumpfer (Kanten-)winkel gröfser als Null, so ist das Vielflach sicher nicht konvex; denn mindestens an einer der übrigen, in dem betreffenden Eckpunkte des Vielflaches endigenden Kanten mufs der Flächenwinkel ebenfalls überstumpf sein, welches Vorkommnis die Bedingung des Nichtkonvexseins ausspricht.“ Danach wäre also das Bestehen eines konvexen Vielflaches mit überstumpfen Kantenwinkeln unmöglich. Dies ist jedoch falsch (wie u. a. ein Blick in die auf S. 101 der vorliegenden Untersuchungen aufgestellte Tabelle der konvexen Polyeder unmittelbar zeigt). Der Schlufs, den Brückner anwendet, ist deshalb unrichtig, weil dabei Kante und Schnittlinie verwechselt wird. —

Beweis.

Die Symmetrieebene, welche die betreffende Kante enthält, halbiert den zu untersuchenden Flächenwinkel und geht aufserdem durch den Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel. Fällt man nun vom Berührungspunkt aus die Senkrechte auf die Kante und verbindet den Berührungspunkt und den Fufspunkt des Lotes mit dem Mittelpunkt der Kugel, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck. Der an dem Fufspunkt gelegene spitze Winkel ist dann entweder die Hälfte unseres Flächenwinkels, wenn der Berührungspunkt auf derjenigen Seite der Kante liegt, welche dem zum Polyeder gehörigen Teile der Fläche zugewendet ist; oder er ist das Supplement der Hälfte unseres Flächenwinkels, wenn der Berührungspunkt auf der entgegengesetzten Seite der Kante liegt. Im ersten Fall ist also der Flächenwinkel $< \pi$, im zweiten Falle dagegen $> \pi$. Q. e. d.

NB.! Der Winkel wird $= \pi$, wenn der Berührungspunkt auf die Kante fällt.

Da es hiernach vor allem auf den Berührungspunkt H ankommt, so ist es nötig, sich zunächt seine Lage genau zu überlegen:

Der Berührungspunkt H liegt immer in der Zelle 1 (oder auf ihren Begrenzungslinien).

Beweis.

Die Fufspunkte der Höhen im $\triangle ABC$ sind zugleich die Fufspunkte der von O auf die Kanten AB, AC bez. BC gefällten Lote. Andererseits sind die Punkte ab, ac bez. bc die Schnittpunkte der Halbierungslinien der von den Koordinatenachsen gebildeten rechten Winkel mit den Kanten AB, AC bez. BC. Diese Punkte ab, ac, bc teilen also die Kanten im Verhältnis der Abschnitte auf den Koordinatenachsen, also wie $\overline{OA}:\overline{OB}$, $\overline{OA}:\overline{OC}$, $\overline{OB}:\overline{OC}$, die Höhenfufspunkte dagegen teilen die Kanten im Verhältnis der Quadrate $(\overline{OA}^2 : \overline{OB}^2;\ \overline{OA}^2 : \overline{OC}^2;\ \overline{OB}^2 : \overline{OC}^2)$. Da nun $\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2} \lesseqgtr \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ usw., so liegt der Höhenfufspunkt immer zwischen der Ecke mit dem kleineren Index und dem betreffenden Diagonalpunkt (bez. in der Ecke oder dem Diagonalpunkt). Also liegt der Höhenschnittpunkt immer in Zelle 1 (oder auf ihren Begrenzungslinien). Q. e. d.

Die Fälle, in denen H auf eine der Begrenzungslinien der Zelle 1 rückt, treten nur bei den Spezialisierungen des Hexakisoktaeders ein; denn die in der betreffenden Kante sich schneidenden Flächen fallen dann in eine Ebene zusammen (das Nähere s. § 7).

Nunmehr sind wir imstande, sofort aus der Beschaffenheit der Begrenzungsfläche eines Polyeders die konvexen und konkaven Flächenwinkel anzugeben. Zur Erleichterung der Übersicht kann man die dem Berührungspunkt H (also der Zelle 1) zugewandte Seite jeder direkt-symmetrischen Kante durch Punktierung hervorheben. Der Flächenwinkel an einer Kante ist dann konvex, wenn die betreffende Punktierung in der Begrenzungsfläche des Polyeders liegt.

Damit also ein gleichflächiges Polyeder nur konvexe Flächenwinkel besitze, mufs seine Begrenzungsfläche ein geschlossenes Polygon sein, in dessen Innern sich der Berührungspunkt H befindet (das also Zellform 1 enthält) und bei dessen Umlaufung Punkt H immer auf der gleichen (punktierten) Seite der Kanten gelegen ist. Man findet also alle konvexen Polyeder m ter Art, wenn man an die Begrenzungsflächen aller Polyeder $(m-1)$ ter Art der Reihe nach die angrenzenden Zellformen ansetzt, sofern die obige Forderung dabei erfüllt wird. Da die Zellformen 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 14 und 16 je zwei Kanten mit konvexen Flächenwinkeln besitzen, so können diese immer unmittelbar an ein benachbartes Polygon (das schon Begrenzungsfläche eines konvexen Polyeders ist) angesetzt werden; denn ein solches Polygon kann nur längs der dritten Kante an die anzusetzende Zellform angrenzen. Dagegen enthalten die übrigen geschlossenen Zellformen (abgesehen von 1, das als einziges nur Kanten mit konvexen Flächenwinkeln besitzt), nämlich 6, 9, 13, 15, 17 nur je eine Kante mit konvexen Flächenwinkeln. Diese Zellformen können nur dann an ein benachbartes Polygon angesetzt werden, wenn demselben die beiden anderen Kanten angehören.

Es kann also ein Polygon, das die Begrenzungsfläche eines unserer konvexen Polyeder bildet, erweitert werden durch Ansetzen

von	Zellform	2,	wenn	in	dem	ursprünglichen	Polygon	Zellform	1	enthalten	ist,			
„	„	3,	„	„	„	„	„	„	1	„	„			
„	„	4,	„	„	„	„	„	„	3	„	„			
„	„	5,	„	„	„	„	„	„	2	„	„			
„	„	6,	„	„	„	„	„	„	4 u. 5	„	„			

von	Zellform	7,	wenn	in	dem	ursprünglichen	Polygon	Zellform	1	enthalten	ist,		
„	„	8,	„	„	„	„	„	„	7	„	„,		
„	„	9,	„	„	„	„	„	„	3 u. 7	„	„,		
„	„	10,	„	„	„	„	„	„	9	„	„,		
„	„	11,	„	„	„	„	„	„	2	„	„,		
„	„	12,	„	„	„	„	„	„	11	„	„,		
„	„	13,	„	„	„	„	„	„	5 u. 11	„	„,		
„	„	14,	„	„	„	„	„	„	8	„	„,		
„	„	15,	„	„	„	„	„	„	12 u. 14	„	„,		
„	„	16,	„	„	„	„	„	„	4	„	„,		
„	„	17.	„	„	„	„	„	„	6 u. 16	„	„.		

Die Zellsymbole sind demnach so gewählt, dafs die angesetzte Zellform a immer an solche Zellformen grenzt, deren Zahlzeichen kleiner als a sind.[1]) Wenn man daher die konvexen Polyeder einer jeden Art von Anfang an nach der natürlichen Zahlenordnung der Symbole ihrer Zellformen gruppiert, so werden von selbst alle Wiederholungen vermieden, sofern man zum Erweitern immer nur Zellformen benützt, deren Zahlzeichen höher sind, als das höchste (also letzte) Zahlzeichen der ursprünglichen Begrenzungsfläche.

Denn angenommen, man würde eine Zellform a an das ursprüngliche $(m-1)$ gliedrige Begrenzungspolygon A anfügen, wobei a kleiner sei als das Zahlzeichen b des letzten Gliedes von A, so liefse sich die neue Reihe B durch Transposition von a in die natürliche Anordnung B' bringen, in der selbstverständlich b wiederum die letzte Stelle einnimmt. Die Reihe der $(m-1)$ ersten Glieder von B', die also a, dagegen nicht b enthalten, würde ein schon aufgeführtes Polygon C von $(m-1)$ Zellformen darstellen. An C kann aber b, das gröfser ist als das letzte Zeichen von C, angesetzt werden; man würde also auf diesem Wege wieder zu B' (welches als Polygon identisch mit B ist) gelangen, das also jetzt zweimal aufgeführt wäre. Hiermit ist aber gezeigt, dafs mittels der oben angegebenen Methode tatsächlich die Begrenzungsflächen aller konvexen gleichflächigen Polyeder abgeleitet werden können. Ferner sind Wiederholungen ausgeschlossen, da die natürliche Reihenfolge von n Zahlen vollkommen eindeutig ist.

Übrigens hat die angegebene Methode noch den Vorteil, dafs die

[1]) Die Wahl der Symbole konnte zugleich so getroffen werden, dafs eine beliebige Zellform a nur Zellformen, deren Zeichen kleiner als a ist, verdecken kann (vgl. § 3, S. 76—80).

neu gefundenen Polyeder sich ganz von selbst während der Ableitung ebenfalls nach der natürlichen Zahlenfolge gruppieren.

In der folgenden Tabelle sind nun alle konvexen Polyeder in derselben natürlichen Anordnung, in der sie sich ergeben haben, zusammengestellt.

Die vierte Rubrik gibt an, bei welchen Körpern auch die Begrenzungsfläche konvex ist. Dabei bedeutet:

„△“ = „Die Begrenzungsfläche ist ein Dreieck“,
„□“ = „Die „ „ „ konvexes Viereck“,
„ ‖ “ = „Die „ „ „ unendlicher Parallelstreifen“.

Aufserdem sind in der gleichen Rubrik durch „+“ bez. „×“ „konzentrische Anordnungen“ von hauptachsigen (bipyramidalen) bez. hexakistetraedrischen Teilpolyedern bezeichnet. § 5 wird hierauf näher eingehen und wird die Kriterien für das Zerfallen bestimmen. —

Ferner sei bemerkt, dafs die an der Bildung der Aufsenfläche beteiligten Zellformen durch Fettdruck hervorgehoben sind; diejenigen Zellformen dagegen, bei welchen dies nur für gewisse Familien gilt, sind durch Kursivdruck gekennzeichnet.

Endlich soll in einer fünften Rubrik zur weiteren Verdeutlichung eine Charakteristik der körperlichen Ecken[1]) der Polyeder gegeben werden. Auch dies kann unmittelbar aus der Beschaffenheit der Begrenzungsfläche abgelesen werden. Da sich nämlich in einer m-zähligen Achse m Symmetrieebenen treffen, so gehen durch den Spurpunkt einer solchen Achse in unserer Schnittfigur m direkt-symmetrische Kanten, die $2m$ Winkelräume bilden, entsprechend der Anzahl der in diesem Punkte sich treffenden Polyederflächen. Ein solcher Winkelraum, in allen $2m$ Flächen, stellt eine vollständige Ecke erster Art[2]) dar; demnach ergeben ν Winkelräume in ihren Wiederholungen eine Ecke νter Art. Um also die Art einer Ecke zu bestimmen, braucht man nur die Zahl der Winkelräume, die in der Begrenzungsfläche an dieser Ecke liegen, abzulesen. Wir bedienen uns dabei der Bezeichnung von Hefs: „m_ν“ bedeutet eine aus m Flächen gebildete Ecke νter Art. Ferner ist zu beachten, dafs eine m flächige Ecke $\frac{48}{m}$ mal im Polyeder auftritt.

[1]) Da alle Flächenwinkel konvex sind, existieren hier natürlich nur konvexe Ecken.

[2]) Dieser Artbegriff (definiert durch die Anzahl der Bedeckungen des der Ecke einbeschriebenen Kegels) deckt sich hier wegen der Konvexität der Ecken genau mit dem Hefsschen Artbegriff einer Ecke (vgl. S. 68/69).

Tabelle der konvexen Polyeder.

Art	Name	Typus	+△× □	Art der Ecken
1	**1**	I, 1	△	8_1; 6_1; 4_1
2	1. **2**	I, 2	□	8_2; 6_2; 4_1, 4_1
„	1. **3**	I, 3	△	8_1, 8_1; 6_2
„	1. **7**	I, 7	△ ×	8_2; 6_1, 6_1
3	1. **2**. **3**	II, 1	△ +	8_1, 8_2; 4_1
„	1. 2. **5**	I, 5	△ +	8_1, 8_2; 4_1
„	1. **2**. **7**	II, 2	□	8_3; 6_1, 6_2; 4_1
„	1. 2. **11**	I, 11	□	8_3; 6_1, 6_2; 4_1
„	1. 3. **4**	I, 4	△ +	8_1, 8_2; 4_1
„	1. **3**. **7**	II, 4	—	8_1, 8_2; 6_1, 6_2; 4_3
„	1. 7. **8**	I, 8	□	8_3; 6_1, 6_2; 4_1
4	1. 2. 3. **4**	I, 4	—	8_2, 8_2; 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **5**	I, 5	—	8_1, 8_1, 8_2; 6_4
„	1. **2**. **3**. **7**	III, 1	—	8_1, 8_3; 6_1; 4_1, 4_3
„	1. 2. **3**. **11**	II, 6	△	8_1, 8_3; 6_1
„	1. 2. **5**. **7**	II, 15	△	8_1, 8_3; 6_1
„	1. 2. **5**. **11**	II, 19	—	8_1, 8_3; 6_1; 4_1, 4_3
„	1. 2. 7. **8**	I, 8	□	6_2, 6_2; 4_1, 4_1
„	1. 2. 7. **11**	I, 11	△ ×	6_1, 6_1, 6_2
„	1. 2. 11. **12**	I, 12	□	6_2, 6_2; 4_1, 4_1
„	1. 3. **4**. **7**	II, 9	—	8_2, 8_2; 6_1; 4_1, 4_3
„	1. 3. 4. **16**	I, 16 ($\beta\gamma$)	△	8_1, 8_3; 6_1
„	1. **3**. 7. **8**	II, 5	—	8_1, 8_3; 6_2, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 3. 7. **9**	I, 9	□ ×	8_2, 8_2; 6_2, 6_2
„	1. 7. 8. **14**	I, 14 ($\alpha\gamma$)	△ ×	6_1, 6_1, 6_2
5	1. 2. 3. **4**. **5**	II, 8	—	8_1, 8_2, 8_2; 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. **4**. **7**	II, 9	—	8_2, 8_3; 6_1, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **4**. **11**	II, 12	—	8_2, 8_3; 6_1, 6_1; 4_1
„	1. 2. 3. 4. **16**	I, 16 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3; 6_1, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. **5**. **7**	II, 15	—	8_1, 8_1, 8_3; 6_1, 6_4; 4_3
„	1. 2. 3. **5**. **11**	II, 19	—	8_1, 8_1, 8_3; 6_1, 6_4; 4_3
„	1. 2. **3**. 7. **8**	II, 5	—	8_1; 6_2; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. **2**. 3. 7. **9**	II, 3	□	8_2, 8_3; 6_2; 4_1
„	1. 2. **3**. 7. **11**	II, 6	—	8_1; 6_1, 6_1; 4_3
„	1. 2. **3**. 11. **12**	II, 7	△	8_1; 6_2; 4_1

Art	Name	Typus	+△× □	Art der Ecken
5	1. 2. **5**. 7. **8**	II, 16	△	8_1; 6_2; 4_1
„	1. 2. **5**. 7. **11**	II, 19	—	8_1; 6_1, 6_1; 4_3
„	1. 2. **5**. 11. **12**	II, 20	—	8_1; 6_2; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 5. 11. **13**	I, 13	□	8_2, 8_3; 6_2; 4_1
„	1. 2. 7. **8**. **11**	II, 29	—	8_5; 6_1, 6_2, 6_2; 4_1
„	1. 2. 7. 8. **14**	I, 14 ($\alpha\gamma$)	—	8_5; 6_1, 6_2, 6_2; 4_1
„	1. 2. 7. 11. **12**	I, 12	—	8_5; 6_1, 6_2, 6_2; 4_1
„	1. 3. **4**. 7. **8**	II, 10	—	8_2, 8_3; 6_2; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 3. **4**. 7. **9**	II, 11	□	8_2, 8_3; 6_2; 4_1
„	1. 3. 4. 7. **16**	I, 16 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3; 6_1, 6_1; 4_3
„	1. 3. 7. **8**. **9**	II, 28	□	8_2, 8_3; 6_2; 4_1
„	1. **3**. 7. 8. **14**	II, 37 ($\alpha\gamma$)	—	8_1; 6_1, 6_2, 6_2; 4_3
„	1. 3. 7. 9. **10**	I, 10	□	8_2, 8_3; 6_2; 4_1
6	1. 2. 3. 4. 5. **6**	I, 6	△ +	8_2, 8_2, 8_2
„	1. 2. 3. **4**. **5**. **7**	III, 3	—	8_1, 8_2, 8_3; 6_1, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **4**. **5**. **11**	III, 6	—	8_1, 8_2, 8_3; 6_1, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5**. **16**	II, 52 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_2, 8_3; 6_1, 6_5
„	1. 2. 3. **4**. 7. **8**	II, 10	—	8_2; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **4**. 7. **9**	II, 11	—	8_3, 8_3; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **4**. 7. **11**	II, 12	—	8_2; 6_1, 6_1, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 7. **16**	I, 16 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3; 6_1, 6_1, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **4**. 11. **12**	II, 13	—	8_2; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 11. **16**	I, 16 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3; 6_1, 6_1, 6_4
„	1. 2. 3. **5**. 7. **8**	II, 16	—	8_1, 8_1; 6_2, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **5**. 7. **9**	II, 17	—	8_1, 8_2, 8_3; 6_2, 6_4
„	1. 2. 3. **5**. 7. **11**	II, 19	—	8_1, 8_1; 6_1, 6_1, 6_4; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. **5**. 11. **12**	II, 20	—	8_1, 8_1; 6_2, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 5. 11. **13**	I, 13	—	8_1, 8_2, 8_3; 6_2, 6_4
„	1. 2. 3. 7. **8**. **9**	II, 28	△ +	8_2; 4_1, 4_1
„	1. 2. **3**. 7. **8**. **11**	III, 2	—	8_1, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. **3**. 7. 8. **14**	II, 37 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 7. 9. **10**	I, 10	□	8_3, 8_3; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 7. **9**. **11**	II, 31	△ ×	8_2; 6_1, 6_2
„	1. 2. **3**. 7. 11. **12**	II, 7	—	8_1, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. **5**. 7. **8**. **11**	III, 15	—	8_1, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. **5**. 7. 8. **14**	II, 39 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_5; 6_1, 6_2
„	1. 2. **5**. 7. 11. **12**	II, 20	—	8_1, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 5. 7. 11. **13**	I, 13	△ ×	8_2; 6_1, 6_2
„	1. 2. 5. 11. **12**. **13**	II, 36	△ +	8_2; 4_1, 4_1
„	1. 2. 7. 8. 11. **12**	I, 12	—	8_6; 6_2, 6_2, 6_2; 4_1, 4_1
„	1. 2. 7. 8. 11. **14**	I, 14 ($\alpha\gamma$)	×	8_6; 6_1, 6_1, 6_2, 6_2

Art	Name	Typus	$+\triangle\times\square$	Art der Ecken
6	1. 3. **4.** 7. **8. 9**	III, 8	$\square$	8_3, 8_3; 4_1, 4_1
„	1. 3. **4.** 7. 8. **14**	II, 38 ($\alpha\gamma$)	—	8_2; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 3. 4. 7. **8. 16**	II, 54 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 3. 4. 7. 9. **10**	I, 10	$\underset{+}{\triangle}$	8_2; 4_1, 4_1
„	1. 3. 4. 7. 9. **16**	I, 16 ($\beta\gamma$)	$\underset{\times}{\triangle}$	8_2; 6_1, 6_2
„	1. 3. 7. 8. 9. **10**	I, 10	—	8_3, 8_3; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 3. 7. 8. **9. 14**	II, 41 ($\alpha\gamma$)	$\underset{\times}{\triangle}$	8_2; 6_1, 6_2
7	1. 2. 3. 4. 5. **6. 7**	II, 21	—	8_2, 8_2, 8_3; 6_1; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6. 11**	II, 25	—	8_2, 8_2, 8_3; 6_1; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6. 16**	II, 53 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_2, 8_3; 6_1; 4_3
„	1. 2. 3. *4.* **5.** 7. **8**	III, 4 bez. II, 16	—	8_1, 8_2; 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **4. 5.** 7. **9**	III, 5	—	8_1, 8_3, 8_3; 6_2, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. **4. 5.** 7. **11**	III, 6	—	8_1, 8_2; 6_1, 6_1, 6_5; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. **16**	II, 52 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_3, 8_3; 6_1, 6_1, 6_5; 4_3
„	1. 2. 3. *4.* **5.** 11. **12**	III, 7; II, 20	—	8_1, 8_2; 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **4.** 5. 11. **13**	II, 14	—	8_2, 8_2, 8_3; 6_2, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. 4. **5.** 11. **16**	II, 52 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_3, 8_3; 6_1, 6_1, 6_5; 4_3
„	1. 2. 3. **4.** 7. **8. 9**	III, 8	—	8_3; 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **4.** 7. *8.* **11**	III, 9; II, 12	—	8_2, 8_5; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **4.** 7. 8. **14**	II, 38 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_5; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 7. **8. 16**	II, 54 ($\beta\gamma$)	—	8_3; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 7. 9. **10**	I, 10	—	8_3; 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **4.** 7. **9. 11**	III, 11	—	8_3; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 9. **16**	I, 16 ($\beta\gamma$)	—	8_3; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. **4.** 7. 11. **12**	II, 13	—	8_2, 8_5; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 7. 11. **16**	I, 16 ($\beta\gamma$)	—	8_3; 6_1, 6_1, 6_1, 6_4; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 11. **12. 16**	II, 56 ($\beta\gamma$)	—	8_3; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. **5.** 7. **8. 9**	III, 14	—	8_1, 8_2; 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. **5.** 7. **8. 11**	III, 15	—	8_1, 8_1, 8_5; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. **14**	II, 39 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_1, 8_5; 6_1, 6_2, 6_4; 4_3
„	1. 2. 3. **5.** 7. 9. **10**	II, 18	—	8_1, 8_3, 8_3; 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. **5.** 7. *9.* **11**	III, 16; II, 19	—	8_1, 8_2; 6_1, 6_2, 6_4; 4_3
„	1. 2. 3. **5.** 7. 11. **12**	II, 20	—	8_1, 8_1, 8_5; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 5. 7. 11. **13**	I, 13	—	8_1, 8_2; 6_1, 6_2, 6_4; 4_3
„	1. 2. 3. 5. 11. **12. 13**	II, 36	—	8_1, 8_2; 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 7. 8. 9. **10**	I, 10	—	8_3; 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 7. **8. 9. 11**	III, 29	—	8_2, 8_5; 6_1; 4_1
„	1. 2. 3. 7. 8. **9. 14**	II, 41 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_5; 6_1; 4_1
„	1. 2. **3.** 7. 8. 11. **12**	II, 7	—	8_1, 8_6; 6_2, 6_2; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. **3.** 7. 8. 11. **14**	II, 37 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_6; 6_1, 6_1, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 7. 9. **10. 11**	II, 33	$\triangle$	8_3; 6_1; 4_1

Art	Name	Typus	$+/-\times$ □	Art der Ecken
7	1. 2. 3. 7. **9**. 11. **12**	II, 32	—	8_2, 8_5; 6_2, 6_2; 4_1
„	1. 2. **5**. 7. 8. 11. **12**	II, 20	—	8_1, 8_6; 6_2, 6_2; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 5. 7. **8**. 11. **13**	II, 30	—	8_2, 8_5; 6_2, 6_2; 4_1
„	1. 2. **5**. 7. 8. 11. **14**	II, 39 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_6; 6_1, 6_1, 6_2; 4_3
„	1 2. 5. 7. 11. **12**. **13**	II, 36	—	8_2, 8_5; 6_1; 4_1
„	1. 2. 7. 8. 11. **12**. **14**	II, 43 ($\alpha\gamma$)	—	8_7; 6_1, 6_2, 6_2, 6_2; 4_1
„	1. 3. 4. 7. 8. 9. **10**	I, 10	—	8_3; 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 3. **4**. 7. 8. **9**. **14**	III, 33 ($\alpha\gamma$)	△	8_3; 6_1; 4_1
„	1. 3. 4. 7. **8**. 9. **16**	II, 54 ($\beta\gamma$)	△	8_3; 6_1; 4_1
„	1. 3. 4. 7. 8. **14**. **16**	II, 61 (γ)	—	8_3; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2; 4_3
„	1. 3. 4. 7. 9. **10**. **16**	II, 55 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_5; 6_1; 4_1
„	1. 3. 7. 8. 9. **10**. **14**	II, 42 ($\alpha\gamma$)	—	8_3; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1
8	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. **8**	II, 22	—	8_2, 8_2; 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. **9**	II, 23	□	8_2, 8_3, 8_3; 6_2
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. **11**	II, 25	—	8_2, 8_2; 6_1, 6_1; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. **16**	II, 53 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_3; 6_1, 6_1; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 11. **12**	II, 26	—	8_2, 8_2; 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 11. **13**	II, 27	□	8_2, 8_3, 8_3; 6_2
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 11. **16**	II, 53 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_3; 6_1, 6_1; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 16. **17**	I, 17 ($\beta\gamma$)	□	8_2, 8_3, 8_3; 6_2
„	1. 2. 3. *4*. **5**. 7. **8**. **9**	IV, 1; III, 14	—	8_1, 8_3; 6_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. *4*. **5**. 7. *8*. **11**	IV, 2; III, 15; III, 6	—	$8_1, 8_2, 8_5$; $6_1, 6_2, 6_5$; $4_1, 4_1, 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. *4*. **5**. 7. 8. **14**	III, 32; II, 39 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_2, 8_5; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5**. 7. **8**. **16**	III, 56 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_3; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5**. 7. 9. **10**	II, 18	—	8_1, 8_3; 6_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **4**. **5**. 7. *9*. **11**	IV, 3; III, 6	—	8_1, 8_3; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5**. 7. 9. **16**	II, 52 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_3; 6_1, 6_2, 6_5
„	1. 2. 3. *4*. **5**. 7. 11. **12**	III, 7; II, 20	—	$8_1, 8_2, 8_5$; $6_1, 6_2, 6_5$; $4_1, 4_1, 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. **4** 5. 7. 11. **13**	II, 14	—	8_2, 8_2; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5**. 7. 11. **16**	II, 52 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_3; 6_1, 6_1, 6_1, 6_5; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. *4*. 5. 11. **12**. **13**	III, 13; II, 36	—	8_2, 8_2; 6_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. **5**. 11. **12**. **16**	III, 58 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_3; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 11. **13**. **16**	II, 57 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_3; 6_1, 6_2, 6_5
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **10**	I, 10	—	6_4, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **4**. 7. *8*. 9. **11**	IV, 5; III, 11	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **4**. 7. 8. **9**. **14**	III, 33 ($\alpha\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. **8**. 9. **16**	II, 54 ($\beta\gamma$)	—	6_1, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **4**. 7. 8. 11. **12**	II, 13	—	$8_2, 8_6$; $6_2, 6_2, 6_4$; $4_1, 4_1, 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. **4**. 7. 8. 11. **14**	II, 38 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_6; 6_1, 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 7. **8**. 11. **16**	II, 54 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. **14**. **16**	II, 61 (γ)	—	$8_3, 8_5$; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3

Art	Name	Typus	$+\triangle\times\square$	Art der Ecken
8	1. 2. 3. 4. 7. 9. **10. 11**	II, 33	—	6_1, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 9. **10. 16**	II, 55 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **4.** 7. **9.** 11. **12**	III, 12	—	8_3, 8_5; 6_2, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 9. 11. **16**	I, 16 ($\beta\gamma$)	×	6_1, 6_1, 6_2, 6_4
„	1. 2. 3. 4. 7. 11. **12. 16**	II, 56 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. 9. **10**	II, 18	—	8_1, 8_3; 6_4, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **5.** 7. **8.** *9.* **11**	IV, 6; III, 15	—	8_1, 8_2, 8_5; 6_1, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. *9.* **14**	III, 36; II, 39 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_2, 8_5; 6_1, 6_4
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. 11. **12**	II, 20	—	$8_1, 8_1, 8_6$; $6_2, 6_2, 6_4$; $4_1, 4_1, 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. 5. 7. **8.** 11. **13**	II, 30	—	8_1, 8_2, 8_5; 6_2, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. 11. **14**	II, 39 ($\alpha\gamma$)	—	$8_1, 8_1, 8_6$; $6_1, 6_1, 6_2, 6_4$; $4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. **5.** 7. 9. **10. 11**	III, 18	—	8_1, 8_3; 6_1, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **5.** 7. *9.* 11. **12**	III, 17; II, 20	—	8_1, 8_2, 8_5; 6_2, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 5. 7. 9. 11. **13**	I, 13	×	8_2, 8_2; 6_2, 6_2, 6_4
„	1. 2. 3. 5. 7. 11. **12. 13**	II, 36	—	8_1, 8_2, 8_5; 6_1, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 7. 8. 9. **10. 11**	II, 33	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 7. 8. 9. **10. 14**	II, 42 ($\alpha\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 7. 8. **9.** 11. **12**	II, 32	—	8_2, 8_6; 6_2; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3 7. 8. **9.** 11. **14**	II, 41 ($\alpha\gamma$)	×	8_2, 8_6; 6_1, 6_1
„	1. 2. **3.** 7. 8. 11. **12. 14**	III, 31 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_7; 6_1, 6_2, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 7. 9. **10.** 11. **12**	II, 34	—	8_3, 8_5; 6_2; 4_1, 4_1
„	1. 2. 5. 7. 8. 11. **12. 13**	II, 36	—	8_2, 8_6; 6_2; 4_1, 4_1
„	1. 2. **5.** 7. 8. 11. **12. 14**	III, 38 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_7; 6_1, 6_2, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 5. 7. 8. 11. **13. 14**	II, 44 ($\alpha\gamma$)	×	8_2, 8_6; 6_1, 6_2, 6_2
„	1. 2. 7. 8. 11. 12. 14. **15**	I, 15 ($\alpha\gamma$)	$\square$	6_2, 6_2, 6_2, 6_2
„	1. 3. 4. 7. 8. 9. **10. 14**	II, 42 ($\alpha\gamma$)	—	6_1, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 3. 4. 7. 8. 9. **10. 16**	II, 55 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 3. 4. 7. 8. 9. **14. 16**	II, 61 (γ)	‖×	$(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$
9	1. 2. 3. 4. 5. **6** 7. **8. 9**	III, 20	$\overset{\triangle}{+}$	8_2, 8_3; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. *8.* **11**	III, 21; II, 25	—	8_2, 8_2, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. **14**	II, 40 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_2, 8_5; 6_1, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. **8. 16**	III, 59 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. **10**	II, 24	$\overset{\triangle}{+}$	8_2, 8_3; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. *9.* **11**	III, 23; II, 25	—	8_2, 8_3; 6_1, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. **16**	II, 53 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3; 6_1, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 11. **12**	II, 26	—	8_2, 8_2, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 11. **13**	II, 27	—	8_2, 8_3; 6_1, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 11. **16**	II, 53 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3; 6_1, 6_1, 6_1; 4_3, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 16. **17**	I, 17 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3, 8_3; 6_1, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 11. **12. 13**	III, 28	$\overset{\triangle}{+}$	8_2, 8_3; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 11. **12. 16**	III, 61 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3

Art	Name	Typus	$+\triangle\times\square$	Art der Ecken
9	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 11. **13. 16**	III, 62 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3, 8_3; 6_1, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 11. 16. **17**	I, 17 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3, 8_3; 6_1, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. **10**	II, 18	—	8_1; 6_4, 6_5; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. *4.* **5.** 7. *8. 9.* **11**	V, 1; IV, 6; IV, 3; IV, 2; III, 15; III, 6	—	8_1, 8_3, 8_5; 6_1, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. *4.* **5.** 7. 8. *9.* **14**	IV, 9; III, 36; III, 32; II, 39 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_3, 8_5; 6_1, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. **8.** 9. **16**	III, 56 ($\beta\gamma$)	—	8_1; 6_1, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. *4.* **5.** 7. 8. 11. **12**	III, 7; II, 20	—	$8_1, 8_2, 8_6$; $6_2, 6_2, 6_5$; $4_1, 4_1, 4_1, 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. *4.* 5. 7. *8.* 11. **13**	III, 10; II, 30; II, 14	—	8_2, 8_2, 8_5; 6_2, 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. *4.* **5.** 7. 8. 11. **14**	III, 32; II, 39 ($\alpha\gamma$)	—	$8_1, 8_2, 8_6$; $6_1, 6_1, 6_2, 6_5$; $4_1, 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. **8.** 11. **16**	III, 56 ($\beta\gamma$)	—	$8_1, 8_3, 8_5$; $6_1, 6_1, 6_2, 6_5$; $4_1, 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. **14. 16**	III, 68 (γ)	—	$8_1, 8_3, 8_5$; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2, 6_5; 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 9. **10. 11**	III, 18	—	8_1; 6_1, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 9. **10. 16**	III, 57 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_3, 8_5; 6_1, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. *4.* **5.** 7. *9.* 11. **12**	IV, 4; III, 17; III, 7; II, 20	—	8_1, 8_3, 8_5; 6_2, 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **4.** 5. 7. 9. 11. **13**	II, 14	—	8_2, 8_3; 6_2, 6_2, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 9. 11. **16**	II, 52 ($\beta\gamma$)	—	8_1; 6_1, 6_1, 6_2, 6_5; 4_3
„	1. 2. 3. *4.* 5. 7. 11. **12. 13**	III, 13; II, 36	—	8_2, 8_2, 8_5; 6_1, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 11. **12. 16**	III, 58 ($\beta\gamma$)	—	$8_1, 8_3, 8_5$; $6_1, 6_1, 6_2, 6_5$; $4_1, 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 11. **13 16**	II, 57 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3; 6_1, 6_1, 6_2, 6_5; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 11. **12. 13. 16**	III, 66 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3; 6_1, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **10. 11**	II, 33	—	8_5; 6_1, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **10. 14**	II, 42 ($\alpha\gamma$)	—	8_5; 6_1, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **10. 16**	II, 55 ($\beta\gamma$)	—	8_5; 6_1, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **4.** 7. 8. **9.** 11. **12**	III, 12	—	8_3, 8_6; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **4.** 7. 8. **9.** 11. **14**	III, 33 ($\alpha\gamma$)	—	8_3, 8_6; 6_1, 6_1, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. **8.** 9. 11. **16**	II, 54 ($\beta\gamma$)	—	8_5; 6_1, 6_1, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **14. 16**	II, 61 (γ)	—	8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. **4.** 7. 8. 11. *12.* **14**	III, 34; II, 38 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_7; 6_1, 6_2, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 11. **12. 16**	II, 56 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_6; 6_1, 6_2, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 11. **14. 16**	II, 61 (γ)	—	8_3, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_1, 6_2, 6_4; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 7. 9. **10.** 11. **12**	II, 34	—	8_5; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 9. **10.** 11. **16**	II, 55 ($\beta\gamma$)	—	8_5; 6_1, 6_1, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 9. 11. **12. 16**	II, 56 ($\beta\gamma$)	—	8_5; 6_1, 6_2, 6_2, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. 9. **10. 11**	III, 18	—	$8_1, 8_3, 8_5$; $6_1, 6_4, 6_4$; $4_1, 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. 9. **10. 14**	III, 37 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_3, 8_5; 6_1, 6_4, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. *9.* 11. **12**	III, 17; II, 20	—	8_1, 8_2, 8_6; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 5. 7. **8.** 9. 11. **13**	II, 30	—	8_2, 8_2, 8_5; 6_2, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. *9.* 11. **14**	III, 36; II, 39 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_2, 8_6; 6_1, 6_1, 6_4; 4_3
„	1. 2. 3. 5. 7. 8. 11. **12. 13**	II, 36	—	8_1, 8_2, 8_6; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. 11. **12. 14**	III, 38 ($\alpha\gamma$)	—	$8_1, 8_1, 8_7$; $6_1, 6_2, 6_2, 6_4$; $4_1, 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. 5. 7. 8. 11. **13. 14**	II, 44 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_2, 8_6; 6_1, 6_2, 6_2, 6_4; 4_3
„	1. 2. 3. **5.** 7. 9. *10.* 11. **12**	III, 19; II, 20	—	8_1, 8_3, 8_5; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3

Art	Name	Typus	$+\triangle\times\square$	Art der Ecken
9	1. 2. 3. 5. 7. 9. **10.** 11. **13**	II, 35	—	8_2, 8_3; 6_2, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 5. 7. 9. 11. **12.** **13**	II, 36	—	8_2, 8_2, 8_5; 6_2, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 7. 8. 9. **10.** 11. **12**	II, 34	—	8_3, 8_6; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 7. 8. 9. **10.** 11. **14**	II, 42 ($\alpha\gamma$)	—	8_3, 8_6; 6_1, 6_1, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 7. 8. **9.** 11. **12.** **14**	III, 43 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_7; 6_1, 6_2; 4_1
„	1. 2. **3.** 7. 8. 11. 12. 14. **15**	II, 45 ($\alpha\gamma$)	—	8_1; 6_2, 6_2, 6_2; 4_3
„	1. 2. 5. 7. 8. 11. **12.** **13.** **14**	III, 46 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_7; 6_1, 6_2; 4_1
„	1. 2. **5.** 7. 8. 11. 12. 14. **15**	II, 47 ($\alpha\gamma$)	—	8_1; 6_2, 6_2, 6_2; 4_3
„	1. 3. 4. 7. 8. 9. **10.** **14.** **16**	III, 70 (γ)	—	8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_4; 4_1
10	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. **10**	II, 24	—	8_2; 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. *8.* *9.* **11**	IV, 7; III, 23; III, 21; II, 25	—	8_2, 8_3, 8_5; 6_1; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. *9.* **14**	III, 39; II, 40 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_5; 6_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. **8.** 9. **16**	III, 59 ($\beta\gamma$)	—	8_2; 6_1; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 11. **12**	II, 26	—	8_2, 8_2, 8_6; 6_2, 6_2; 4_1, 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. *8.* 11. **13**	III, 22; II, 27	—	8_2, 8_3, 8_5; 6_2, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 11. **14**	II, 40 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_2, 8_6; 6_1, 6_1, 6_2; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. **8.** 11. **16**	III, 59 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_5; 6_1, 6_1, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. **14.** **16**	III, 69 (γ)	—	8_2, 8_3, 8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. **8.** 16. **17**	II, 58 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3; 6_2, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. **10.** **11**	III, 25	—	8_2; 6_1; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. **10.** **16**	III, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_5; 6_1; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. *9.* 11. **12**	III, 24; II, 26	—	8_2, 8_3, 8_5; 6_2, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. 11. **13**	II, 27	□	8_3, 8_3; 6_2, 6_2
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. 11. **16**	II, 53 ($\beta\gamma$)	—	8_2; 6_1, 6_1, 6_2; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. 16. **17**	I, 17 ($\beta\gamma$)	□	8_3, 8_3; 6_2, 6_2
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 11. **12.** **13**	III, 28	—	8_2, 8_3, 8_5; 6_1; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 11. **12.** **16**	III, 61 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_5; 6_1, 6_1, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 11. **13.** **16**	III, 62 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3; 6_1, 6_1, 6_2; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 11. 16. **17**	I, 17 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3; 6_1, 6_1, 6_2; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 11. **12.** **13.** **16**	IV, 26 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3; 6_1; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 11. **12.** 16. **17**	II, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3; 6_2, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 11. 13. 16. **17**	I, 17 ($\beta\gamma$)	□	8_3, 8_3; 6_2, 6_2
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. **10.** **11**	III, 18	—	8_1, 8_5; 6_1, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. **10.** **14**	III, 37 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_5; 6_1, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. **10.** **16**	III, 57 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_5; 6_1, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. *4.* **5.** 7. 8. *9.* 11. **12**	IV, 4; III, 17; III, 7; II, 20	—	8_1, 8_3, 8_6; 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. *4.* 5. 7. *8.* 9. 11. **13**	III, 10; II, 30; II, 14	—	8_2, 8_3, 8_5; 6_2, 6_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. *4.* **5.** 7. 8. *9.* 11. **14**	IV, 9; III, 36; III, 32; II, 39 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_3, 8_6; 6_1, 6_1, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. **8.** 9. 11. **16**	III, 56 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_5; 6_1, 6_1, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. **14.** **16**	III, 68 (γ)	—	8_1, 8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_5
„	1. 2. 3. *4.* 5. 7. 8. 11. **12.** **13**	III, 13; II, 36	—	8_2, 8_2, 8_6; 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. *4.* **5.** 7. 8. 11. *12.* **14**	IV, 10; III, 38; III, 33 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_2, 8_7; 6_1, 6_2, 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3, 4_3

Art	Name	Typus	$+\,\triangle\,\times\,\square$	Art der Ecken
10	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 11. **12. 16**	III, 58 ($\beta\gamma$)	—	$8_1, 8_3, 8_6; 6_1, 6_2, 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. *4.* 5. 7. 8. 11. **13. 14**	III, 35; II, 44 ($\alpha\gamma$)	—	$8_2, 8_2, 8_6; 6_1, 6_2, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. **8.** 11. **13. 16**	III, 63 ($\beta\gamma$)	—	$8_2, 8_3, 8_5; 6_1, 6_2, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 11. **14. 16**	II, 61 (γ)	—	$8_1, 8_3, 8_6; (6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty, 6_1, 6_2, 6_5; 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 9. *10.* 11. **12**	III, 19; II, 20	—	$8_1, 8_5; 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 9. **10.** 11. **13**	II, 35	—	$8_2; 6_2, 6_5; 4_1, 4_1$
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 9. **10.** 11. **16**	III, 57 ($\beta\gamma$)	—	$8_1, 8_5; 6_1, 6_1, 6_5; 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. *4.* 5. 7. 9. 11. **12. 13**	III, 13; II, 56	—	$8_2, 8_3, 8_5; 6_2, 6_5; 4_1, 4_1$
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 9. 11. **12. 16**	III, 58 ($\beta\gamma$)	—	$8_1, 8_5; 6_1, 6_2, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 9. 11. **13. 16**	II, 57 ($\beta\gamma$)	×	$8_2; 6_1, 6_2, 6_2, 6_5$
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 11. **12. 13. 16**	III, 66 ($\beta\gamma$)	—	$8_2, 8_3, 8_5; 6_1, 6_1, 6_5; 4_1, 4_3$
„	1. **2.** 3. 4. 7. 8. 9. **10.** 11. **12**	II, 34	—	$8_6; 6_2, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1, 4_1$
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **10.** 11. **14**	II, 42 ($\alpha\gamma$)	—	$8_6; 6_1, 6_1, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1$
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **10.** 11. **16**	II, 55 ($\beta\gamma$)	—	$8_5, 8_5; 6_1, 6_1, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1$
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **10. 14. 16**	III, 70 (γ)	—	$8_5, 8_5; (6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1$
„	1. 2. 3. **4.** 7. 8. **9.** 11. **12. 14**	IV, 11 ($\alpha\gamma$)	—	$8_3, 8_7; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1$
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. 11. **12. 16**	II, 56 ($\beta\gamma$)	—	$8_6; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1$
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. 11. **14. 16**	II, 61 (γ)	×	$8_6; (6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty, 6_1, 6_4$
„	1. 2. 3. **4.** 7. 8. 11. 12. 14. **15**	II, 46 ($\alpha\gamma$)	—	$8_2; 6_2, 6_2, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 11. **12. 14. 16**	III, 71 (γ)	—	$8_3, 8_7; (6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty, 6_2, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 7. 9. **10.** 11. *12.* **16**	III, 64; II, 55 ($\beta\gamma$)	—	$8_5, 8_5; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1$
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. 9. *10.* 11. **12**	III, 19; II, 20	—	$8_1, 8_3, 8_6; 6_2, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 5. 7. 8. 9. **10.** 11. **13**	II, 35	—	$8_2, 8_3, 8_5; 6_2, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1$
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. 9. **10.** 11. **14**	III, 37 ($\alpha\gamma$)	—	$8_1, 8_3, 8_6; 6_1, 6_1, 6_4, 6_4; 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 5. 7. 8. 9. 11. **12. 13**	II, 36	—	$8_2, 8_2, 8_6; 6_4; 4_1, 4_1$
„	1. **2.** 3. **5.** 7. 8. *9.* 11. **12. 14**	IV, 13; III, 38 ($\alpha\gamma$)	—	$8_1, 8_2, 8_7; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 5. 7. 8. 9. 11. **13. 14**	II, 44 ($\alpha\gamma$)	×	$8_2, 8_2, 8_6; 6_1, 6_2, 6_4$
„	1. 2. 3. 5. 7. 8. 11. **12. 13. 14**	III, 46 ($\alpha\gamma$)	—	$8_1, 8_2, 8_7; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3$
„	1. 2. **3.** 5. 7. 8. 11. 12. 14. **15**	II, 45 ($\alpha\gamma$)	—	$8_1, 8_1; 6_2, 6_2, 6_2, 6_4; 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. 5. 7. 9. *10.* 11. **12. 13**	III, 30; II, 36	—	$8_2, 8_3, 8_5; 6_4; 4_1, 4_1$
„	1. 2. 3. 7. 8. 9. **10.** 11. *12.* **14**	III, 44; II, 42 ($\alpha\gamma$)	—	$8_3, 8_7; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1$
„	1. 2. 3. 7. 8. **9.** 11. 12. 14. **15**	II, 49 ($\alpha\gamma$)	$\underset{\times}{\triangle}$	$8_2; 6_2, 6_2$
„	1. 2. 5. 7. 8. 11. 12. **13.** 14. **15**	II, 51 ($\alpha\gamma$)	$\underset{\times}{\triangle}$	$8_2; 6_2, 6_2$
11	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. **10. 11**	III, 25	—	$8_2, 8_5; 6_1, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. **10. 14**	III, 40 ($\alpha\gamma$)	—	$8_2, 8_5; 6_1, 6_4; 4_1$
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. **10. 16**	III, 60 ($\beta\gamma$)	—	$8_2, 8_5; 6_1, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. *9.* 11. **12**	III, 24; II, 26	—	$8_2, 8_3, 8_6; 6_2; 4_1, 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. *8.* 9. 11. **13**	III, 22; II, 27	—	$8_3, 8_3, 8_5; 6_2; 4_1$
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. *9.* 11. **14**	III, 39; II, 40 ($\alpha\gamma$)	—	$8_2, 8_3, 8_6; 6_1, 6_1; 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. **8.** 9. 11. **16**	III, 59 ($\beta\gamma$)	—	$8_2, 8_5; 6_1, 6_1; 4_1, 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. **14. 16**	III, 69 (γ)	—	$8_2, 8_5; (6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty; 4_3$

Art	Name	Typus	+△× □	Art der Ecken
11	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. **8.** 9. 16. **17**	II, 58 ($\beta\gamma$)	△	8_3; 6_2; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 11. **12. 13**	III, 28	—	8_2, 8_3, 8_6; 6_2; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 11. *12.* **14**	III, 41; II, 40 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_2, 8_7; 6_1, 6_2, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 11. **12. 16**	III, 61 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_6; 6_1, 6_2, 6_2; 4_1, 4_1, 4_3, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 11. **13. 14**	III, 42 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_6; 6_1, 6_2, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. **8.** 11. **13. 16**	IV, 23 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3, 8_5; 6_1, 6_2, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 11. **14.** 16	III, 69 (γ)	—	8_2, 8_3, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_1, 6_2; 4_3, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. **8.** 11. 16. **17**	II, 58 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3, 8_5; 6_1, 6_2, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. **14.** 16. **17**	II, 63 (γ)	—	8_3, 8_3, 8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. *10.* 11. **12**	III, 26; II, 26	—	8_2, 8_5; 6_2; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. **10.** 11. **13**	III, 27	△	8_3; 6_2; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. **10.** 11. **16**	III, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_5; 6_1, 6_1; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. **10.** 16. **17**	II, 59 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3, 8_5; 6_2; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. 11. **12. 13**	III, 28	—	8_3, 8_3, 8_5; 6_2; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. 11. **12. 16**	III, 61 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_5; 6_1, 6_2, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. 11. **13. 16**	III, 62 ($\beta\gamma$)	—	8_3; 6_1, 6_2, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. 11. 16. **17**	I, 17 ($\beta\gamma$)	—	8_3; 6_1, 6_2, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 11. **12. 13. 16**	IV, 26 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3, 8_5; 6_1, 6_1; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 11. **12.** 16. **17**	II, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3, 8_5; 6_1, 6_2, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 11. 13. 16. **17**	I, 17 ($\beta\gamma$)	—	8_3; 6_1, 6_2, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 11. **12.** 13. 16. **17**	II, 60 ($\beta\gamma$)	△	8_3; 6_2; 4_1
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. *10.* 11. **12**	III, 19; II, 20	—	8_1, 8_6; 6_2, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1, 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. **10.** 11. **13**	II, 35	—	8_2, 8_5; 6_2, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. **10.** 11. **14**	III, 37 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_6; 6_1, 6_1, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. **10.** 11. **16**	III, 57 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_5, 8_5; 6_1, 6_1, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. **10.** 14. **16**	IV, 28 (γ)	—	8_1, 8_5, 8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_4, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. *4.* 5. 7. 8. 9. 11. **12. 13**	III, 13; II, 36	—	8_2, 8_3, 8_6; 6_5; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. *4.* **5.** 7. 8. *9.* 11. *12.* **14**	V, 2; IV, 13; IV, 9; IV, 10; III, 38 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_3, 8_7; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. 11. **12. 16**	III, 58 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_6; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. *4.* 5. 7. 8. 9. 11. **13. 14**	III, 35; II, 44 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_6; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. **8.** 9. 11. **13. 16**	III, 63 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_5; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. 11. **14. 16**	III, 68 (γ)	—	8_1, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_1, 6_5; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 11. **12. 13. 14**	III, 46 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_2, 8_7; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 11. **12. 13. 16**	III, 66 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_6; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. *4.* **5.** 7. 8. 11. 12. 14. **15**	III, 47; II, 47 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_2; 6_2, 6_2, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 11. **12. 14. 16**	IV, 29 (γ)	—	8_1, 8_3, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 11. **13. 14. 16**	III, 72 (γ)	—	8_2, 8_3, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2, 6_2, 6_5; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 9. *10.* 11. **12. 13**	III, 30; II, 36	—	8_2, 8_5; 6_5; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 9. *10.* 11. *12.* **16**	IV, 22; III, 58; III, 57 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_5, 8_5; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 9. **10.** 11. **13. 16**	III, 65 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_5; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 9. 11. **12. 13. 16**	III, 66 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_5; 6_1, 6_2, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **10.** 11. *12.* **14**	III, 44; II, 42 ($\alpha\gamma$)	—	8_7; 6_1, 6_2, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1

Art	Name	Typus	$+\triangle\times\square$	Art der Ecken
11	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **10.** 11. *12.* **16**	III, 64; II, 55 ($\beta\gamma$)	—	8_5, 8_6; 6_1, 6_2, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **10.** 11. **14.** **16**	III, 70 (γ)	—	8_5, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_1, 6_4, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. **4.** 7. 8. **9.** 11. 12. 14. **15**	III, 48 ($\alpha\gamma$)	—	8_3; 6_2, 6_2, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. 11. **12.** **14.** **16**	III, 71 (γ)	—	8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 11. 12. 14. **15.** **16**	II, 62 (γ)	—	8_3; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_2, 6_4; 4_3
„	1. 2. 3. 5. 7. 8. 9. *10.* 11. **12.** **13**	III, 30; II, 36	—	8_2, 8_3, 8_6; 6_4, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. 9. *10.* 11. *12.* **14**	IV, 14; III, 38; III, 37 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_3, 8_7; 6_1, 6_2, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 5. 7. 8. 9. **10.** 11. **13.** **14**	III, 45 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_6; 6_1, 6_2, 6_4, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 5. 7. 8. 9. 11. **12.** **13.** **14**	III, 46 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_2, 8_7; 6_1, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. **5.** 7. 8. 9. 11. 12. 14. **15**	II, 47 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_2; 6_2, 6_2, 6_4; 4_3
„	1. 2. 3. 5. 7. 8. 11. 12. **13.** 14. **15**	II, 51 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_2; 6_2, 6_2, 6_4; 4_3
„	1. 2. 3. 7. 8. 9. **10.** 11. 12. 14. **15**	II, 50 ($\alpha\gamma$)	—	8_3; 6_2, 6_2, 6_4; 4_1
12	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. *10.* 11. **12**	III, 26; II, 26	—	8_2, 8_6; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. **10.** 11. **13**	III, 27	—	8_3, 8_5; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. **10.** 11. **14**	III, 40 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_6; 6_1, 6_1, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. **10.** 11. **16**	III, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_5, 8_5; 6_1, 6_1, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. **10.** **14.** **16**	IV, 30 (γ)	—	8_2, 8_5, 8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. **10.** 16. **17**	II, 59 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. 11. **12.** **13**	III, 28	—	8_3, 8_3, 8_6; 4_1, 4_1
„	1. **2.** 3. 4. 5. **6.** 7. 8. *9.* 11. *12.* **14**	IV, 15; III, 51; III, 39 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_7; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. 11. **12.** **16**	III, 61 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_6; 6_1, 6_2; 4_1, 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. 11. **13.** **14**	III, 42 ($\alpha\gamma$)	—	8_3, 8_3, 8_6; 6_1, 6_2
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. **8.** 9. 11. **13.** **16**	IV, 23 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. 11. **14.** **16**	III, 69 (γ)	—	8_2, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_1; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. **8.** 9. 11. 16. **17**	II, 58 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. **14.** 16. **17**	II, 63 (γ)	—	8_3, 8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 11. *12.* **13.** **14**	IV, 18; III, 42 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_7; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 11. **12.** **13.** **16**	III, 66 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3, 8_6; 6_1, 6_2; 4_1, 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 11. 12. 14. **15**	II, 48 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_2; 6_2, 6_2, 6_2; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 11. **12.** **14.** **16**	IV, 31 (γ)	—	$8_2, 8_3, 8_7; (6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty, 6_2, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 11. **12.** 16. **17**	II, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_3, 8_6; 6_2, 6_2, 6_2; 4_1, 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 11. **13.** **14.** **16**	IV, 32 (γ)	—	8_3, 8_3, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2, 6_2; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. **8.** 11. 13. 16. **17**	II, 58 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_2, 6_2, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 11. **14.** 16. **17**	II, 63 (γ)	—	8_3, 8_3, 8_6; 6_1, $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. *10.* 11. **12.** **13**	IV, 8; III, 28	—	8_3, 8_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. *10.* 11. *12.* **16**	IV, 24; III, 61; III, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_5, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. **10.** 11. **13.** **16**	IV, 25 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. **10.** 11. 16. **17**	II, 59 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 9. 11. **12.** **13.** **16**	IV, 26 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. 11. **12.** 16. **17**	II, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_2, 6_2, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. 11. 13. 16. **17**	I, 17 ($\beta\gamma$)	$\overset{\triangle}{\times}$	6_2, 6_2, 6_2

Art	Name	Typus	$+\triangle\times\square$	Art der Ecken
12	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 11. **12**. 13. 16. **17**	II, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5; 6_1, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. *10*. 11. **12**. **13**	III, 30; II, 36	—	8_2, 8_6; 6_4, 6_5; 4_1, 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. **5**. 7. 8. 9. *10*. 11. *12*. **14**	IV, 14; III, 38; III, 37 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_7; 6_1, 6_2, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5**. 7. 8. 9. *10*. 11. *12*. **16**	IV, 22; III, 58; III, 57 ($\beta\gamma$)	—	8_1, 8_5, 8_6; 6_1, 6_2, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. **10**. 11. **13**. **14**	III, 45 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_6; 6_1, 6_2, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. **10**. 11. **13**. **16**	III, 65 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_5, 8_5; 6_1, 6_2, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. **5**. 7. 8. 9. **10**. 11. **14**. **16**	IV, 28 (γ)	—	8_1, 8_5, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_1, 6_4, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 11. **12**. **13**. **14**	III, 46 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_7; 6_1, 6_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 11. **12**. **13**. **16**	III, 66 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_6; 6_1, 6_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. *4*. **5**. 7. 8. *9*. 11. 12. 14. **15**	IV, 20; III, 50; III, 47; II, 47 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_3; 6_2, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5**. 7. 8. 9. 11. **12**. **14**. **16**	IV, 29 (γ)	—	8_1, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 11. **13**. **14**. **16**	III, 72 (γ)	×	8_2, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2, 6_5
„	1. 2. 3. *4*. 5. 7. 8. 11. 12. **13**. 14. **15**	III, 49; II, 51 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_2; 6_2, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 11. **12**. **13**. **14**. **16**	IV, 35 (γ)	—	8_2, 8_3, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5**. 7. 8. 11. 12. 14. **15**. **16**	III, 73 (γ)	—	8_1, 8_3; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_2, 6_5; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 9. *10*. 11. *12*. **13**. **16**	IV, 27; III, 66; III, 65 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_5, 8_5; 6_1, 6_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **10**. 11. 12. 14. **15**	II, 50 ($\alpha\gamma$)	—	6_2, 6_2, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **10**. 11. *12*. **14**. **16**	IV, 33; III, 70 (γ)	—	8_5, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. 11. 12. 14. **15**. **16**	II, 62 (γ)	×	$(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_4
„	1. 2. 3. 5. 7. 8. 9. *10*. 11. *12*. **13**. **14**	IV, 19; III, 46; III, 45 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_3, 8_7; 6_1, 6_4, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. **5**. 7. 8. 9. *10*. 11. 12. 14. **15**	III, 51; II, 47 ($\alpha\gamma$)	—	8_1, 8_3; 6_2, 6_2, 6_4, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 5. 7. 8. 9. 11. 12. **13**. 14. **15**	II, 51 ($\alpha\gamma$)	×	8_2, 8_2; 6_2, 6_4
13	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. 8. 9. *10*. 11. **12**. **13**	IV, 8; III, 28	—	8_3, 8_6; 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. 8. 9. *10*. 11. *12*. **14**	IV, 16; III, 41; III, 40 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_7; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. 8. 9. *10*. 11. *12*. **16**	IV, 24; III, 61; III, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_5, 8_6; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. 8. 9. **10**. 11. **13**. **14**	IV, 17 ($\alpha\gamma$)	—	8_3, 8_6; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. 8. 9. **10**. 11. **13**. **16**	IV, 25 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5, 8_5; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. 8. 9. **10**. 11. **14**. **16**	IV, 30 (γ)	—	8_2, 8_5, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_1, 6_4; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. **10**. 11. 16. **17**	II, 59 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5, 8_5; 6_1, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. **10**. **14**. 16. **17**	III, 77 (γ)	—	8_3, 8_5, 8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. 8. 9. 11. *12*. **13**. **14**	IV, 18; III, 42 ($\alpha\gamma$)	—	8_3, 8_3, 8_7; 6_1; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. 8. 9. 11. **12**. **13**. **16**	IV, 26 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_6; 6_1; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. 8. *9*. 11. 12. 14. **15**	III, 52; II, 48 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_3; 6_2, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. **12**. **14**. **16**	IV, 31 (γ)	—	8_2, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. **12**. 16. **17**	II, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_6; 6_2, 6_2; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. 8. 9. 11. **13**. **14**. **16**	IV, 32 (γ)	—	8_3, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. **8**. 9. 11. 13. 16. **17**	II, 58 ($\beta\gamma$)	—	8_5; 6_2, 6_2; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. **14**. 16. **17**	II, 63 (γ)	—	8_3, 8_6; 6_1, $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. 8. 11. 12. **13**. 14. **15**	III, 54 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_3; 6_2, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. 8. 11. **12**. **13**. **14**. **16**	V, 8 (γ)	—	8_3, 8_3, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 11. **12**. 13. 16. **17**	II, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_6; 6_2, 6_2; 4_1, 4_1, 4_3

Art	Name	Typus	$+\triangle\times\square$	Art der Ecken
13	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 11. 12. 14. **15. 16**	II, 62 (γ)	—	8_2, 8_3; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_2; 4_3, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 11. **12.** 14. 16. **17**	II, 60 (γ)	—	8_3, 8_3, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_2; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 11. 13. **14.** 16. **17**	II, 63 (γ)	—	8_3, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. *10.* 11. *12.* **13. 16**	IV, 27; III, 66; III, 65 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5, 8_5; 6_1; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. *10.* 11. *12.* 16. **17**	III, 67; II, 60; II, 59 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5, 8_5; 6_2, 6_2; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. **10.** 11. 13. 16. **17**	II, 59 ($\beta\gamma$)	—	8_5; 6_2, 6_2; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. 11. **12.** 13. 16. **17**	II, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_5; 6_2, 6_2; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. *10.* 11. *12.* **13. 14**	IV, 19; III, 46; III, 45 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_7; 6_1, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. *10.* 11. *12.* **13. 16**	IV, 27; III, 66; III, 65 ($\beta\gamma$)	—	8_2, 8_5, 8_6; 6_1, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. *10.* 11. 12. 14. **15**	III, 51; II, 47 ($\alpha\gamma$)	—	8_1; 6_2, 6_2, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. *10.* 11. *12.* **14. 16**	V, 5; IV, 29; IV, 28 (γ)	—	$8_1, 8_5, 8_7$; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty, 6_2, 6_4, 6_5$; $4_1, 4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. **10.** 11. **13. 14. 16**	IV, 34 (γ)	—	8_2, 8_5, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2, 6_4, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. *4.* 5. 7. 8. 9. 11. 12. **13.** 14. **15**	III, 49; II, 51 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_3; 6_2, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 11. **12. 13. 14. 16**	IV, 35 (γ)	—	8_2, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_5; 4_1
„	1. 2. 3. 4. **5.** 7. 8. 9. 11. 12. 14. **15. 16**	III, 73 (γ)	—	8_1; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_5; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 11. 12. **13.** 14. **15. 16**	III, 76 (γ)	—	8_2, 8_3; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_5; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. **10.** 11. 12. 14. **15. 16**	III, 75 (γ)	—	8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_4, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 5. 7. 8. 9. *10.* 11. 12. **13.** 14. **15**	III, 55; II, 51 ($\alpha\gamma$)	—	8_2, 8_3; 6_2, 6_4, 6_1; 4_1
14	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. *10.* 11. *12.* **13. 14**	V, 3; IV, 18; IV, 17 ($\alpha\gamma$)	—	8_3, 8_7; 6_1, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. *10.* 11. *12.* **73. 16**	V, 4; IV, 26; IV, 25 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5, 8_6; 6_1, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. *10.* 11. 12. 14. **15**	III, 53; II, 48 ($\alpha\gamma$)	—	8_2; 6_2, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. *10.* 11. *12.* **14. 16**	V, 6; IV, 31; IV, 30 (γ)	—	$8_2, 8_5, 8_7$; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty, 6_2, 6_4$; $4_1, 4_1, 4_3, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. *10.* 11. *12.* 16. **17**	III, 67; II, 60; II, 59 ($\beta\gamma$)	—	8_3, 8_5, 8_6; 6_2, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. **10.** 11. **13. 14. 16**	V, 7 (γ)	—	8_2, 8_5, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. **10.** 11. 13. 16. **17**	II, 59 ($\beta\gamma$)	—	8_5, 8_5; 6_2, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. **10.** 11. **14.** 16. **17**	III, 77 (γ)	—	$8_3, 8_5, 8_6$; 6_1, $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_4; $4_1, 4_3$
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. 11. 12. **13.** 14. **15**	III, 54 ($\alpha\gamma$)	$\triangle$	8_3, 8_3; 6_2
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. 11. **12. 13. 14. 16**	V, 8 (γ)	—	8_3, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. **12.** 13. 16. **17**	II, 60 ($\beta\gamma$)	—	8_6; 6_2; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. 11. 12. 14. **15. 16**	III, 74 (γ)	—	8_2; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. **12. 14.** 16. **17**	III, 78 (γ)	—	8_3, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. 13. **14.** 16. **17**	II, 63 (γ)	$\times$	8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 11. 12. **13.** 14. **15. 16**	III, 76 (γ)	—	8_3, 8_3; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 11. **12.** 13. **14.** 16. **17**	III, 78 (γ)	—	8_3, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 11. 12. 14. **15.** 16. **17**	II, 64 (γ)	—	8_3, 8_3; $(6_2 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_2; 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. **10.** 11. **12.** 13. 16. **17**	III, 67 ($\beta\gamma$)	—	8_5, 8_5; 6_2; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. *10.* 11. 12. **13.** 14. **15**	III, 55; II, 51 ($\alpha\gamma$)	—	8_2; 6_2, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. *10.* 11. *12.* **13. 14. 16**	V, 9; IV, 35; IV, 34 (γ)	—	8_2, 8_5, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_4, 6_5; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. **10.** 11. 12. 14. **15. 16**	III, 75 (γ)	—	8_1, 8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_4, 6_5; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 11. 12. **13.** 14. **15. 16**	III, 76 (γ)	$\times$	8_2; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_5

Art	Name	Typus	$+\triangle\times\square$	Art der Ecken
15	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. *10.* 11. 12. **13.** 14. **15**	IV, 21; III, 54 ($\alpha\gamma$)	—	8_3; 6_2, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. *10.* 11. *12.* **13. 14. 16**	VI, 1; V, 8; V, 7 (γ)	—	8_3, 8_5, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty$, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. *10.* 11. *12.* 13. 16. **17**	III, 67; II, 60; II, 59 ($\beta\gamma$)	—	8_5, 8_6; 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. *10.* 11. 12. 14. **15. 16**	IV, 37; III, 74 (γ)	—	8_2, 8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. *10.* 11. *12.* 14. 16. **17**	III, 67; II, 60; II, 59 (γ)	—	8_3, 8_5, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_4; 4_1, 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. **10.** 11. 13. **14.** 16. **17**	III, 77 (γ)	—	8_5, 8_6; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_4; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. 11. 12. **13.** 14. **15. 16**	IV, 38 (γ)	—	8_3; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. **12.** 13. **14.** 16. **17**	III, 78 (γ)	—	8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$; 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. 12. 14. **15.** 16. **17**	II, 64 (γ)	—	8_3; $(6_2 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 11. 12. 13. 14. **15.** 16. **17**	II, 64 (γ)	—	8_3; $(6_2 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2; 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. *10.* 11. 12. **13.** 14. **15. 16**	IV, 39; III, 76 (γ)	—	8_2, 8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_4, 6_5; 4_1
16	1. 2. 3. 4. 5. **6.** 7. 8. 9. *10.* 11. 12. **13.** 14. **15. 16**	V, 10; IV, 38 (γ)	—	8_3, 8_5; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. *10.* 11. *12.* 13. **14.** 16. **17**	IV, 40; III, 78; III, 77 (γ)	—	8_5, 8_7; $(6_1 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_4; 4_1, 4_1
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. *10.* 11. 12. 14. **15.** 16. **17**	III, 79; II, 64 (γ)	—	8_3, 8_5; $(6_2 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_2, 6_4; 4_1, 4_3
„	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. 12. 13. 14. **15.** 16. **17**	II, 64 (γ)	$\parallel\times$	$(6_2 \overset{+}{=} 6_2)_\times$
17	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. *10.* 11. 12. 13. 14. **15.** 16. **17**	III, 79; II, 64 (γ)	—	8_3; $(6_2 \overset{+}{=} 6_2)_\infty$, 6_4; 4_1

Dies sind die zur Hexakisoktaedergruppe gehörenden konvexen gleichflächigen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten. —

Es hat sich also ergeben[1]):

Art A =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl	1	3	7	14	23	35	46	57	64
	α β γ	α β γ	α β γ	α β γ	α β γ	α β γ	α β γ	α β γ	α β γ
	1 1 1	3 3 3	7 7 7	13 13 14	21 21 23	30 30 35	36 37 46	41 43 57	41 45 64
				(2)	(4)	(10)	(18)	(28)	(38)

Art A =	10	11	12	13	14	15	16	17
Anzahl	66	62	51	37	22	11	4	1
	α β γ	α β γ	α β γ	α β γ	α β γ	α β γ	α β γ	α β γ
	37 43 66	29 35 62	19 24 51	10 13 37	4 5 22	1 1 11	— — 4	— — 1
	(46)	(50)	(46)	(36)	(22)	(11)	(4)	(1)

[1]) Diese kleine tabellarische Zusammenstellung habe ich schon in den Sitzb. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss., Bd. 38, Heft 1, S. 10 angegeben. Es sind jedoch dort (für $A = 9$, 12, 14 sowie in der Gesamtzahl) einige Fehler stehen geblieben, die, den obigen Angaben entsprechend, zu korrigieren sind. —

Gesamtzahl der konvexen Polyeder:

für Untergattung α: 293 konvexe Polyeder,
„ „ β: 321 „ „ „
„ „ γ: 504 (316) „ „ .

Hierzu ist zu bemerken:

(a) soll heifsen: „hiervon sind a Polyeder halb geschlossen“. Man hat sodann z. B.

$A = 7$: 46

α	β	γ
36	37	46
		(18)

folgendermafsen zu lesen: „Die Anzahl der konvexen Polyeder von der 7. Art beträgt 46; in Untergattung α existieren 36; in Untergattung β existieren 37; in Untergattung γ existieren 46 und zwar sind von diesen 18 halbgeschlossen“. —

Wenn man jedoch auch sich selbst durchsetzende Polygone als Begrenzungsfläche zuläfst (vgl. § 2, S. 72), so können natürlich irgendwelche der aufgeführten Gestalten (mit Ausnahme von 1) als nicht-konvex betrachtet werden, dadurch, dafs jetzt Schnittlinien als neue Kanten auftreten. Aber niemals kann ein in dem obigen als nicht-konvex angesehenes Polyeder bei derartiger veränderter Betrachtungsweise als konvex erscheinen; denn die Kanten des ursprünglich als Begrenzungsfläche auftretenden sich nicht durchsetzenden Polygons müssen auch in dem neuen sich selbst durchsetzenden Polygon als Kanten vorhanden sein. Also bilden die oben aufgeführten Körper sicherlich das Maximum der konvexen Polyeder. —

Verhältnismäfsig gering ist die Zahl der konvexen Polyeder mit konvexer Begrenzungsfläche; wir haben nämlich erhalten:

$A =$	1	2		3		4		5		6		7
	1 △	2 △ + 1 □		3 △ + 3 □		5 △ + 3 □		2 △ + 5 □		8 △ + 2 □		3 △
	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$
	1 1 1	2 2 2	1 1 1	3 3 3	3 3 3	4 4 5	3 3 3	2 2 2	5 5 5	7 7 8	2 2 2	2 2 3
						(2)				(2)		(2)

$A =$	8		9	10		11	12	13	14	15	16	17
	4 □ + 1 ‖		3 △	2 △ + 3 □		3 △	1 △	—	1 △	—	1 ‖	—
	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$		$\alpha\ \beta\ \gamma$		$\alpha\ \beta\ \gamma$	
	3 3 4	- - 1	3 3 3	2 - 2	1 3 3	1 3 3	- 1 1		1 - 1		- - 1	
	(2)	(1)		(2)	(2)	(2)	(1)		(1)		(1)	

zusammen: für Untergattung α: 28 (△) + 18 (□)
„ „ β: 28 (△) + 20 (□)
„ „ γ: 34 (△) + 21 (□) + 2 (‖).

Natürlich würde die Anzahl der konvexen Polyeder mit konvexer Begrenzungsfläche erheblich vermehrt werden, wenn man auch sich selbst durchsetzende Polygone zuliefse. Doch sind diese nur von geringer Bedeutung, da wegen des Fehlens konvexer 5, 6 ... kantiger Polygone (erster Art) wirkliche konvexe Sternpolygone unmöglich sind und nur Grenzformen von solchen vorkommen können. —

Eine Gruppe von Gestalten, die zum Teil unter den konvexen Körpern mit aufgezählt wurden, sind noch auszuscheiden und besonders zu betrachten: nämlich die „konzentrischen Anordnungen“ von Polyedern. Diese sind nicht kontinuierlich, sondern schon je ein gewisser Teil der Anzahl der Flächen bildet ein vollkommen geschlossenes Polyeder. Diese konzentrischen Anordnungen sollen im folgenden § vollständig abgeleitet werden.

§ 5.

Die konzentrischen Anordnungen von Polyedern.

Um die konzentrischen Anordnungen vollständig zu bestimmen, wollen wir von Symmetriebetrachtungen ausgehen. Es soll also untersucht werden, wann eine Begrenzungsfläche durch fortgesetzte Spiegelungen an denjenigen Symmetrieebenen, welche Kanten der ursprünglichen oder gespiegelten Begrenzungsfläche enthalten, in 48 Lagen gebracht wird, wann nicht. —

Zunächst sind folgende Arten von Eckpunkten zu unterscheiden:

1. Punkte der vierzähligen Achse (A, B, C); abgekürzt: R.

   a) kontinuierliche Eckpunkte; abgekürzt: R_k.

   Die Fläche wird durch die fortgesetzten Spiegelungen an den durch diesen Eckpunkt gehenden Kanten in alle acht Lagen gebracht.

   Mögliche Winkelzahlen = Art der Ecken:

   α = 1, 3, 5, 7 (relativ prim zu 4).

   b) Diskontinuierliche Eckpunkte; abgekürzt R_d.

   Die Fläche gelangt durch die fortgesetzten Spiegelungen an den durch diesen Eckpunkt gehenden Kanten nur in vier Lagen.

   Mögliche Winkelzahlen = Art der Ecke:

   α = 2, 6 (gemeinschaftlicher Teiler mit 4).

2. Punkte der dreizähligen Achse (S_1, S_2, S_3, S_4); abgekürzt: S.

   Immer kontinuierlich; die Fläche gelangt in alle sechs Lagen.

   α = 1, 2, 4, 5 (relativ prim zu 3).

NB. Die durch Zusammenfallen zweier Eckpunkte entstehende diskontinuierliche zwölfflächige Ecke $S_{4\infty}$ verhält sich im wesentlichen wie ein gewöhnlicher sechsflächiger Punkt S.

3. Punkte der zweizähligen Achse (ab, ac, bc; $a\bar{b}$, $a\bar{c}$, $b\bar{c}$); abgekürzt: T.

Immer kontinuierlich; die Fläche gelangt in alle vier Lagen.

$\alpha = 1, 3$ (relativ prim zu 2). —

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:

Diejenige Ebene, welche in O auf der Achse eines Achsenhauptpunktes P senkrecht steht, heifse die Polebene π dieses Punktes. P selbst heifse der Pol dieser Ebene; der auf der gleichen Achse entgegengesetzt gelegene Punkt möge Gegenpol P' genannt werden; die Achse, welche P und P' verbindet, bezeichnen wir als Polachse p. Ferner nennen wir diejenige Seite der Polebene, auf welcher der Pol selbst liegt, positiv, die entgegengesetzte negativ.

Aufserdem ist zu bemerken: Liegt P_1 in π_2, so liegt auch P_2 in π_1. (Zwei solche Punkte P_1 und P_2 nennen wir konjugiert.) Denn: $p_1 \perp \pi_1$ und (da P_1 in π_2 liegt) auch $\perp p_2$; also p_2 und deshalb auch P_2 in π_1. —

Vor allem gelten nun folgende Sätze:

1. Satz.

Wenn man einen kontinuierlichen Eckpunkt durch fortgesetzte Spiegelungen der Begrenzungsfläche an ihren Kanten[1]) in alle möglichen homologen Lagen bringen kann, so kann das Polyeder nicht zerfallen.

Beweis.

Der vollzählige, kontinuierliche Eckpunkt, der auf einer m-zähligen Achse gelegen ist, enthält in jeder seiner Lagen $2m$ Polyederflächen. Ein auf einer m-zähligen Achse gelegener Punkt kann aber $\frac{48}{2m}$ homologe Lagen einnehmen, so dafs tatsächlich die Anzahl der Polyederebenen[2]), welche einem solchen Punkt in allen seinen Lagen angehören, 48 ist. Q. e. d.

2. Satz.

Nimmt ein kontinuierlicher Eckpunkt P vermöge der Spiegelungen an den Kanten eines ihn enthaltenden Begrenzungspolygons alle seine Lagen

[1]) So sagen wir im folgenden kürzer statt: fortgesetzte Spiegelungen der Begrenzungsfläche an denjenigen Symmetrieebenen, welche Kanten der ursprünglichen oder gespiegelten Begrenzungsfläche enthalten.

[2]) Man beachte hierbei: Jede Polyederebene enthält irgend einen Achsenhauptpunkt nur einmal.

auf der einen Seite der Polebene π und, wenn solche Lagen möglich sind, in der Polebene ein, und gelangt er auch nur in eine einzige Lage auf der anderen Seite der Polebene, so wird er durch die Spiegelungen in sämtliche homologe Lagen gebracht.

Beweis.

Es sind zwei Fälle möglich: Die durch die Polebene π von den übrigen getrennte Lage ist entweder der Pol P bez. der Gegenpol P' oder keiner von beiden.

Im ersten Falle vertausche ich Pol und Gegenpol, d. h. ich wähle für eine zweite Operation den Gegenpol zum Ausgangspunkt der zuvor angewandten Spiegelungen; dann wird der Punkt in alle Lagen auf der vorhin nicht erfüllten Seite von π und, wenn dies vorhin der Fall war, nach π selbst gebracht; da die erste und zweite Operation die Lage P' (und P) gemeinsam hat, und da wir es mit einem kontinuierlichen Eckpunkt zu tun haben, so kann man kontinuierlich durch Spiegelung von der ersten zur zweiten Operation übergehen und also den Punkt in alle seine Lagen bringen.

Im zweiten Falle ist notwendig die positive Seite von π mit den Punkten erfüllt (da ja P, als Ausgangspunkt, zu den als bekannt vorausgesetzten Lagen gehört und P' hierbei zunächst gar nicht vorkommt). Auf der Achse, welche durch den auf der negativen Seite von π befindlichen isolierten Punkt geht, liegen zwei unserer als bekannt vorausgesetzten Punkte. Wir wählen einen dieser beiden Punkte zum neuen Pol (P_1) und können dann, von P_1 ausgehend, durch Ausführung einer zweiten Operation, welche der ersten analog und mit ihr durch P_1 kontinuierlich verbunden ist, die positive Seite der zu P_1 gehörenden Polebene π_1 und, wenn dies vorher der Fall war, π_1 selbst vollständig erfüllen. Zugleich gehört aber jetzt der Gegenpol P_1' zu unseren Lagen. Also ist damit der zweite Fall auf den ersten zurückgeführt und der Satz ist bewiesen. —

3. Satz.

Wenn ein kontinuierlicher Eckpunkt P_1 vermöge der Spiegelungen alle Lagen auf der einen Seite der Polebene π_1 und in π_1 einnimmt (dies mufs die positive Seite sein, da wir auf der anderen Seite vorläufig keinen

Punkt kennen) und wenn π_1 selbst sicher Lagen des Punktes enthält, so wird er durch die Spiegelungen in sämtliche homologe Lagen gebracht.

Beweis.

Man wähle einen der in π_1 gelegenen Punkte (P_2) zum neuen Pol und zum Ausgangspunkt einer zweiten (der ersten analogen) Operation. Dann wird die positive Seite von π_2 ganz erfüllt und es gelangt der Punkt auch in alle Lagen, welche ihm seiner Natur nach in π_2 möglich sind, also auch nach P_1 sowie nach P_1', da diese beiden in π_2 gelegen sind. Dann wird also die positive Seite von π_1 (und π_1 selbst) ganz erfüllt und aufserdem der Punkt in die Lage P_1' gebracht. Dann gelangt aber nach dem vorigen Satze der Punkt in alle ihm möglichen Lagen. Q. e. d.

4. Satz.

Wenn ein kontinuierlicher, auf einer geradzähligen Achse gelegener Eckpunkt P vermöge der Spiegelungen irgend eine Lage Q in der Polebene π einnimmt, so wird er durch die Spiegelungen in sämtliche ihm in π mögliche Lagen gebracht.

Beweis.

Die Spiegelungen an den durch den Pol P gehenden Symmetriekanten bringen das Ausgangspolygon in neue Lagen (bei Erhaltung von P) und setzen so die durch die ursprüngliche Operation erhaltene Figur symmetrisch fort. Durch die sämtlichen Spiegelungen an den Symmetrieebenen einer geradzähligen Symmetrieachse werden alle in senkrechter Ebene liegenden gleichzähligen Achsen ineinander übergeführt und auch umgekehrt (d. h. um 180° gedreht); also werden auch alle auf diesen Achsen liegenden homologen Punkte ineinander übergeführt. Q. e. d.

Wenn wir den 3. und 4. Satz zusammennehmen, so erhalten wir den

5. Satz.

Wenn ein kontinuierlicher, auf geradzähliger Achse gelegener Punkt P vermöge der Spiegelungen alle Lagen auf der einen (positiven) Seite der Polebene π einnimmt, und wenn der Punkt auch nur ein einziges Mal nach π gelangt, so wird er durch die Spiegelungen in alle überhaupt möglichen homologen Lagen gebracht. —

6. Satz.

Die Teilpolyeder einer „konzentrischen Anordnung“ sind untereinander kongruent bez. symmetrisch.

Beweis.

Angenommen, dies wäre nicht richtig, so wären mindestens zwei verschieden gestaltete (d. h. nicht kongruente oder nicht symmetrische) Teilpolyeder Q_1 und Q_2 vorhanden. Es gehöre

das Begrenzungspolygon q_1 dem Teilpolyeder Q_1,
„ „ q_2 „ „ Q_2 an.

Dann muſs q_1 und q_2 kongruent oder symmetrisch sein (da ja das Gesamtpolyeder gleichflächig ist). Nun fordert das Bestehen des gleichflächigen Gesamtpolyeders, dessen Ebenen eine symmetrische vollständige Figur bilden, daſs es mit sich selbst, entweder direkt oder nach einer symmetrischen Umformung, dadurch zur Deckung gebracht werden kann, daſs man q_1 mit q_2 (eventuell nach symmetrischer Umformung) zur Deckung bringt. Deshalb müssen auch diejenigen Teilpolyeder, von denen ein Begrenzungspolygon zur Deckung gebracht ist, entweder vollständig ineinander übergeführt werden, oder sie müssen ein vollkommenes Polyeder gemeinsam haben. Also müssen entweder Q_1 und Q_2 kongruent bez. symmetrisch sein, oder sie müssen ein anderes Teilpolyeder Q_3 gemeinsam haben (eventuell nach symmetrischer Umformung). Wenn wir nun im letzteren Falle die gleichen Schlüsse auf die aus $(Q_1 - Q_3)$, $(Q_2 - Q_3)$ und Q_3 gebildeten Paare anwenden, so wird, da (wegen der endlichen Anzahl der Polyederebenen) die Zahl der Teilpolyeder endlich ist, das ursprüngliche Polyeder schliefslich in lauter zu einander kongruente bez. symmetrische Teilpolyeder zerfallen. Q. e. d.

Deshalb ist, wenn wir mit „‘“ die auf das Teilpolyeder bezüglichen Daten bezeichnen, und wenn M die Anzahl der Polyederflächen darstellt:

$$A = cA'$$
$$M = cM'$$

Also folgt noch als notwendige Bedingung für das Zerfallen:

M und A müssen einen gemeinsamen Faktor c haben.

Also ergibt sich in unserem Falle ($M = 48$):

A mufs durch 2 oder 3 teilbar sein.

Auch die Anzahl c der Teilpolyeder kann nur 2 oder 3 als Primteiler haben. —

Die oben abgeleiteten Sätze genügen zur Durchführung der folgenden Betrachtungen über das Zerfallen der Polyeder.

Wir bemerken noch:

Das vollständige System der Punkte R (vierzählige Achsen, Oktaederecken) besteht in Pol, Gegenpol und vier in der Polebene gelegenen Punkten (also nur P und P' aufserhalb π).

Das vollständige System der Punkte S (dreizählige Achsen, Würfelecken) besteht in Pol, Gegenpol und je drei auf der positiven und negativen Seite von π gelegenen Punkten (kein Punkt in π!).

Das vollständige System der Punkte T (zweizählige Achsen, Kantenhalbierungspunkte von Oktaeder und Würfel) besteht in Pol, Gegenpol, zwei in der Polebene gelegenen Punkten und je vier auf der positiven und negativen Seite von π befindlichen Punkten. —

Es sind nun folgende Fälle für die Begrenzungsfläche denkbar:

A) Die Begrenzungsfläche ist ein von Parallelen begrenzter unendlicher Streifen. Beim allgemeinen Hexakisoktaeder kann nur S_4 ins Unendliche rücken (für Untergattung γ). Da die Spiegelungen an den Kanten eines Punktes S die Fläche in sechs Lagen bringen, so zerfällt der Körper in $\frac{48}{6} = 8$ Teilpolyeder, nämlich sechsflächige unendliche Prismen, die zu je zweien einer dreizähligen Achse parallel sind.

B) Die Begrenzungsfläche ist ein n-Eck[1]) (von dem auch Eckpunkte im Unendlichen liegen dürfen); es ist nur möglich:

a) S und T treten als Ecken auf: Schon das Vorhandensein je eines Punktes S und T genügt, um ein Zerfallen auszuschliefsen. Denn: die Drehung um eine trigonale Achse bringt eine zweizählige Achse in die Lage von (zwei) anderen, auf der ersten zweizähligen Achse nicht senkrecht stehenden Achsen; dann haben wir mindestens

[1]) $n \geq 3$.

zwei nicht konjugierte Punkte T; also ist nach $B\ c\ \mathfrak{a}\ \alpha$) ein Zerfallen unmöglich.

b) T fehlt; S vorhanden:

$\mathfrak{a}$) S und R_k vorhanden: Zerfallen ist unmöglich. Denn wählen wir R_k als Pol, so wird durch eine Drehung um S die Polachse, also auch der Pol in die Polebene gebracht. (Die Drehung um eine trigonale Achse bringt die Oktaederspitze in die Basis.) Da der einzige auf der positiven Seite aufserhalb der Polebene gelegene Punkt R der Pol ist, so kann nach Satz 1 und 5 das Polyeder niemals zerfallen.

$\mathfrak{b}$) Auch R_k fehlt:

α) Nur Punkte S vorhanden: Der Körper zerfällt immer; denn durch die Deckbewegungen um eine trigonale Achse werden die verschiedenen Punkte S nur in Lagen gebracht, welche je den Ecken eines der beiden einem Würfel einbeschriebenen reg. Tetraeder entsprechen.

β) S und R_d vorhanden: Auch das Hinzutreten von R_d ändert an den Lagen von S gar nichts, da durch Spiegelung an einer im Halbierungspunkt einer Tetraederkante errichteten senkrechten Ebene das Tetraeder in sich selbst übergeführt wird. Der Körper zerfällt also. — Es ist dabei ausdrücklich zu bemerken, dafs im vorliegenden Falle in R_d sich nur Zwischensymmetriekanten[1]) treffen können (nicht etwa zwei Hauptsymmetriekanten[1]). Denn die Punkte S liegen nur auf Zwischensymmetriekanten und die einzigen Punkte, in denen Zwischen- und Hauptsymmetriekanten sich gegenseitig schneiden, nämlich die Punkte R_k und T sollen fehlen.[2]) —

c) S fehlt; T vorhanden:

---

[1]) Mit Hauptsymmetriekanten seien die Kanten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ bezeichnet. Alle übrigen direkt-symmetrischen Kanten sollen dann Zwischensymmetriekanten heifsen.

[2]) Es sei bemerkt, dafs das Auftreten nur eines Punktes S in Verbindung mit (mindestens) zwei Punkten R_d unmöglich ist. Es schneiden sich nämlich nach dem obigen in S und R_d nur Zwischensymmetriekanten. Nun ist aber auf jeder Zwischensymmetriekante nur ein Punkt R gelegen. Also müfste notwendig noch ein Punkt S auftreten.

a) Mindestens zwei Punkte T:

α) Es sind zwei Punkte T vorhanden, die in verschiedenen Hauptsymmetrieebenen[1]) liegen, d. h. die beiden Punkte T sind nicht zueinander konjugiert: Wir wählen den einen Punkt (T_1) als Pol; der andere heifse T_2. Durch die Drehung um die Polachse p_1 werden die vier zu p_1 nicht senkrecht stehenden (zweizähligen) Achsen (welche selbst zu zweien aufeinander senkrecht stehen) ineinander übergeführt; also wird T_2 dadurch in die drei Lagen gebracht, die ihm auf seiner Seite von π_1 aufser dem auf der Polachse liegenden Punkt noch zur Verfügung stehen; d. h., wenn wir T_2 als neuen Pol wählen: T_2 gelangt in π_2 und aufserdem auf Symmetrieachsen q_2, welche schief stehen zu p_2. Spiegelung an den Kanten des in π_2 gelegenen Punktes bringt T_2 in die Lage des Gegenpoles T_2'; die Drehung um p_2 (ähnlich wie vorhin bei p_1) bringt den auf q_2 gelegenen, T_2 homologen Punkt in alle Lagen, welche auf einer Seite von π_2 für Punkt T_2 noch übrig sind. Da ferner T_2 kontinuierlich ist, so kann nach Satz 1 und 5 ein Zerfallen nicht stattfinden.

β) Die beiden Punkte T liegen in derselben Hauptsymmetrieebene (und ein anderer Punkt T aufserhalb dieser Hauptsymmetrieebene ist nicht vorhanden); ihre Achsen stehen also aufeinander senkrecht.[2]) Es mufs dann in der Begrenzungsfläche der Spurpunkt (R) der senkrecht zu dieser Symmetrieebene gelegenen vierzähligen Achse vorhanden sein. Ein anderer Punkt aufserhalb der genannten Hauptsymmetrieebene steht uns nicht mehr zur Verfügung. Man erhält also (wenn man die in der genannten Hauptsymmetrieebene gelegenen Punkte R zunächst nicht verwendet) eine Dreiecksfläche. Durch Drehung um die Achse von R werden die beiden Punkte

[1]) Hauptsymmetrieebenen seien die eine Hauptsymmetriekante enthaltenden Symmetrieebenen, Zwischensymmetrieebenen seien die eine Zwischensymmetriekante enthaltenden Symmetrieebenen.

[2]) D. h. sie sind konjugiert.

T nicht aus ihrer Symmetrieebene entfernt. Da sich in R die von beiden Punkten T ausgehenden Zwischensymmetriekanten schneiden müssen, so ist R speziell ein R_d. Durch Drehung um die Achse von R_d geht aber sogar die Achse von T nur in sich selbst über; ebenso wird durch Drehung um eine der zweizähligen Achsen die senkrechte vierzählige Achse nur in sich selbst übergeführt. Daher zerfällt der Körper in sechs Teilpolyeder (= der doppelten Anzahl der vierzähligen Achsen). — Zieht man auch die beiden in der erwähnten Hauptsymmetrieebene liegenden Punkte R in Betracht, so entstehen die einzig möglichen (nur in einem Punkt zusammenhängenden) Polygone dadurch, dafs man die beiden (sich ausschliefsenden) Strecken, welche von den vier in der Spur der genannten Symmetrieebene liegenden Punkten $R_{(d)}$, T, $R_{(d)}$, T gebildet werden, von dem aufserhalb liegenden dritten Punkte $R_{(k)}$ projiziert. Auch in diesem Falle zerfällt der Körper (in drei Teilpolyeder), da die Achse von R_k durch Drehung um dazu senkrechte Achsen nur in sich selbst übergeführt wird (vgl. auch B, c, b).

b) Nur ein Punkt T ist vorhanden, im übrigen blofs Punkte R, und zwar notwendig ein Punkt R_k und ein Punkt R_d. Denn da der Punkt T mit zweien von den drei Punkten R auf einer Geraden liegt, so ist die Begrenzungsfläche ein Dreieck; aufserdem treffen sich in T eine Haupt- und eine Zwischensymmetriekante; die dritte Kante $(R-R)$ ist eine Hauptsymmetriekante. Also ist der Schnittpunkt dieser dritten Kante mit der Hauptsymmetriekante $(R-T)$ ein Punkt R_d, der Schnittpunkt mit der Zwischensymmetriekante ein Punkt R_k. Danach liegen T und R_d in der zur Achse von R_k senkrechten Ebene; durch Drehung um die Achse von R_k wird weder T noch R_d aus dieser senkrechten Symmetrieebene herausbewegt. Ebensowenig wird R_k durch Drehung um die Achsen von T oder R_d von seiner Achse entfernt. Also zerfällt der Körper in drei Teilpolyeder (gemäfs der Anzahl der vierzähligen Achsen).

d) S und T fehlen; nur R vorhanden: Die drei Hauptsymmetriekanten bilden als einziges geschlossenes Polygon nur das $\triangle ABC$, in dem jeder Eckpunkt ein R_a ist. Da immer zwei dieser Punkte in der zur Achse des dritten senkrechten Ebene liegen, so wird jeder von ihnen durch die möglichen Drehungen nur in seinen Gegenpol übergeführt; also zerfällt der Körper in sechs Teilpolyeder (achtflächige Bipyramiden). —

B, c, a, β; B, c, b und B, d lassen sich in folgender Weise zusammenfassen: Ein Polyeder zerfällt in drei oder sechs Teile, wenn sein Begrenzungspolygon dadurch gebildet wird, dafs irgend welche Achsenhauptpunkte auf einer Hauptsymmetriekante von dem nicht auf ihr liegenden Punkte R projiziert werden. —

Damit sind alle möglichen Fälle erledigt; es existieren also nur folgende „konzentrische Anordnungen“:

1. Die Begrenzungsfläche ist ein Dreieck mit zwei in der gleichen Hauptsymmetrieebene gelegenen Punkten T und dem aufserhalb dieser Symmetrieebene sich befindenden Punkte R_a als Ecken. Der Körper zerfällt in sechs achtflächige kongruente senkrechte Bipyramiden (des rhombischen Systems) der ersten Art ($A = 6$; $A' = 1$).

Es sind gemäfs der Anzahl der Punkte R drei Gestalten möglich, die alle konvex sind, nämlich:

1. 2. 3. 7. 8. **9**	Typus: II, 28	Ecken:	8_2; 4_1, 4_1
1. 2. 5. 11. **12. 13**	„ II, 36	„	8_2; 4_1, 4_1
1. 3. 4. 7. 9. **10**	„ I, 10	„	8_2; 4_1, 4_1

2. Die Begrenzungsfläche ist ein Dreieck mit einem Punkt T, einem in gleicher Hauptsymmetrieebene gelegenen Punkte R_a und einem nicht in dieser Hauptsymmetrieebene gelegenen Punkte R_k als Ecken. Der Körper zerfällt in drei sechzehnflächige kongruente senkrechte Bipyramiden (von der Art A'). Es sind gemäfs der doppelten Anzahl der Punkte T folgende zwölf Gestalten möglich:

$(ab-A-C)$: 1. 2. **5**	Typus: I, 5	Ecken:	8_1, 8_2; 4_1; $A = 3$; $A' = 1$	konvex
$(ab-B-C)$: 3. 4. **6**	„ I, 6	„	8_1, 8_2; 4_1; $A = 3$; $A' = 1$	($\bar{A} = 27$; $\bar{A}' = 9$) nicht konvex

$(ac-A-B)$: 1. **2. 3** Typus: II, 1 Ecken: 8_1, 8_2; 4_1; $A=3$; $A'=1$ konvex

$(ac-C-B)$: 4. 5. **6** „ I, 6 „ 8_1, 8_2; 4_1; $A=3$; $A'=1$ ($\bar{A}=27$; $\bar{A}'=9$) nicht konvex

$(bc-B-A)$: 1. 3. **4** „ I, 4 „ 8_1, 8_2; 4_1; $A=3$; $A'=1$ konvex

$(bc-C-A)$: 2. 5. **6** „ I, 6 „ 8_1, 8_2; 4_1; $A=3$; $A'=1$ ($\bar{A}=27$; $\bar{A}'=9$) nicht konvex

$(a\bar{b}-A-C)$: 11. **12. 13** Typus: II, 36 Ecken: 8_1, 8_2; 4_1; $A=3$; $A'=1$ ($\bar{A}=27$; $\bar{A}'=9$) nicht konvex

$(a\bar{b}-B-C)$: 1. 2. 3. 4. 5. **6**. 11. **12. 13** „ III, 28 Ecken: 8_2, 8_3; 4_1; $A=9$; $A'=3$ konvex

$(a\bar{c}-A-B)$: 7. **8. 9** „ II, 28 Ecken: 8_1, 8_2; 4_1; $A=3$; $A'=1$ ($\bar{A}=27$; $\bar{A}'=9$) nicht konvex

$(a\bar{c}-C-B)$: 1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. **8. 9** „ III, 20 Ecken: 8_2, 8_3; 4_1; $A=9$; $A'=3$ konvex

$(b\bar{c}-B-A)$: 7. 9. **10** „ I, 10 Ecken: 8_1, 8_2; 4_1; $A=3$; $A'=1$ ($\bar{A}=27$; $\bar{A}'=9$) nicht konvex

$(b\bar{c}-C-A)$: 1. 2. 3. 4. 5. **6**. 7. 9. **10** „ II, 24 Ecken: 8_2, 8_3; 4_1; $A=9$; $A'=3$ konvex.

3. Die Begrenzungsfläche ist ein Dreieck mit drei Punkten R_d als Ecken ($\triangle ABC$). Der Körper zerfällt in sechs kongruente senkrechte achtflächige Bipyramiden (des rhombischen Systems); es ist nur eine einzige (konvexe) Gestalt möglich:

1. 2. 3. 4. 5. **6** Typus: I, 6 Ecken: 8_2, 8_2, 8_2; $A=6$, $A'=1$.

4. Die Begrenzungsfläche ist ein Fünfeck, das nur in einem einzigen Punkte zusammenhängt; die Ecken sind vier in der gleichen Hauptsymmetriekante gelegene Punkte: R_d, T, R_d, T und der Punkt R aufserhalb derselben. Der Körper zerfällt in drei sechzehnflächige kongruente senkrechte Bipyramiden und ist eigentlich eine Kombination von 2. Es sind gemäfs der Anzahl der Punkte R drei (nicht konvexe) Gestalten möglich, nämlich:

3. 4. **6**. 11. **12. 13** Typus: III, 28; Ecken: $8_1 \overset{+}{\equiv} 8_1$, 8_2, 8_2; 4_1, 4_1; $A=6$; $A'=2$; ($\bar{A}=54$; $\bar{A}'=18$)

4. 5. **6**. 7. **8. 9** „ III, 20; „ $8_1 \overset{+}{\equiv} 8_1$, 8_2, 8_2; 4_1, 4_1; $A=6$; $A'=2$; ($\bar{A}=54$; $\bar{A}'=18$)

2. 5. **6**. 7. 9. **10** „ II, 24; „ $8_1 \overset{+}{\equiv} 8_1$, 8_2, 8_2; 4_1, 4_1; $A=6$; $A'=2$; ($\bar{A}=54$; $\bar{A}'=18$).

5. Die Ecken des Begrenzungspolygons sind Punkte S mit oder ohne Punkte R_d; der Körper zerfällt in zwei (sich ergänzende) Hexakistetraeder beliebiger Art (also $A = 2A'$) [vgl. § 8]. Da also T und R_k, d. h. alle diejenigen Punkte fehlen müssen, in denen sich Hauptsymmetriekanten und Zwischensymmetriekanten schneiden, da andererseits wegen Punkt S Zwischensymmetriekanten auftreten müssen, so gehören hierher alle Polyeder, in deren Begrenzungspolygonen die Hauptsymmetriekanten fehlen. Wir denken uns also die Hauptsymmetriekanten aus der Schnittfigur herausgenommen. Dadurch wird die Zahl der geschlossenen Ebenenteile der vollständigen Schnittfigur um $3 \cdot 3 = 9$ vermindert; also wird die Anzahl der geschlossenen Ebenenteile:

für Untergattung α und β: $15 - 9 = 6$,
bez. „ „ γ: $17 - 9 = 8$.

Deshalb beträgt die Anzahl der hierhergehörigen, in zwei Hexakistetraeder irgend einer Art zerfallenden Polyeder:

für Untergattung α und β: $2^6 - 1 = 63$,
„ „ γ: $2^8 - 1 = 255$;

unter diesen konzentrischen Anordnungen der Untergattung γ befinden sich jedoch auch die unter 6. genannten noch weiter zerfallenden Körper, nämlich:

6. Die Begrenzungsfläche ist ein unendlicher Parallelstreifen; einziger Eckpunkt $S_{4\infty}$. Konzentrische Anordnung von acht untereinander kongruenten senkrechten sechsflächigen unendlichen Prismen, die zu je zweien einer dreizähligen Achse parallel sind.

Die Anzahl der möglichen Gestalten ist $\binom{3}{2} = 3$, nämlich:

1. 3. 4. 7. 8. 9. **14. 16**	Typus: II, 61	Ecke: $(6_1 \pm 6_1)_\infty$; $A = 8$; $A' = 1$ konvex	
2. 5. 6. 11. 12. 13. **15. 17**	„ II, 64	Ecke: $(6_1 \pm 6_1)_\infty$; $A = 8$; $A' = 1$ ($\bar{A} = 32$; $\bar{A}' = 4$) nicht konvex	
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. 12. 13. 14. **15.** 16. **17**	„ II, 64	Ecke: $(6_2 \pm 6_2)_\infty$; $A = 16$; $A' = 2$ konvex.	

In der Tabelle der konvexen Polyeder (§ 4) sind die zu 1., 2. bez. 3. gehörigen konzentrischen Anordnungen von drei oder sechs Teilpolyedern durch „+“, die zu 5. bez. 6. gehörenden konzentrischen Anordnungen von zwei oder acht Teilpolyedern durch „$\times$“ besonders gekennzeichnet. —

§ 6.

Die halbregulären Varietäten.

Da bei den gleichflächigen halbregulären Körpern alle Ecken regulär sind, so müssen sämtliche Flächenwinkel des Polyeders einander gleich sein. Umgekehrt ist diese Bedingung eine hinreichende Charakteristik der halbregulären gleichflächigen Vielflache (mit direkt-symmetrischen Kanten). Denn jede der Ecken (die ja nur von Achsenhauptpunkten gebildet werden) enthält ohnedies schon lauter gleiche Kantenwinkel. Um also die hierhergehörigen halbregulären Polyeder zu erhalten, werden wir untersuchen, welche an direkt-symmetrischen Kanten liegenden Flächenwinkel unserer vollständigen Figur einander gleich werden können und wann. Deshalb müssen zuerst von den Parametern n und m abhängende Formeln für diese Flächenwinkel aufgestellt werden.

a) Die Flächenwinkel an den drei Hauptsymmetriekanten AB, AC und BC (allgemein PQ):

Man errichte auf unserer Kante PQ die durch die dritte Achse OR gehende senkrechte Ebene (Fufspunkt L auf PQ). Dann ist $\sphericalangle OLR$ die Hälfte des gesuchten Flächenwinkels φ an der Kante PQ. (Fig. 2)

Es verhält sich nun $\overline{OL} : \overline{OP} = \overline{OQ} : \overline{PQ}$,

also
$$\overline{OL} = \frac{p \cdot q}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Deshalb

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{OL}}{\overline{RL}} = \frac{\overline{OL}}{\sqrt{\overline{OR}^2 + \overline{OL}^2}} = \frac{\frac{p \cdot q}{\sqrt{p^2 + q^2}}}{\sqrt{r^2 + \frac{p^2 q^2}{p^2 + q^2}}} = \frac{p\,q}{\sqrt{p^2 q^2 + p^2 r^2 + q^2 r^2}}$$

Unsere speziellen Werte eingesetzt:

1. Winkel an der Kante AB: $\cos\frac{\varphi_1}{2} = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}$

2. Winkel an der Kante AC: $\cos\frac{\varphi_2}{2} = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}$

3. Winkel an der Kante BC: $\cos\frac{\varphi_3}{2} = \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}$

b) Die Flächenwinkel an den sechs Zwischensymmetriekanten $A-bc$, $B-ac$, $C-ab$; $A-b\bar{c}$, $B-a\bar{c}$, $C-a\bar{b}$ (allgemein $P-qr$) (Fig. 3):

Man lege durch OQ' ($|q|<|r|$) die senkrechte Ebene auf unsere Kante $P-qr$ (Fußspunkt L). Dann ist $\sphericalangle\, OLQ'$ der gesamte Flächenwinkel ψ, also

$$\sphericalangle\, QLJ = \frac{\psi}{2}, \text{ d. h. } \frac{\overline{JL}}{\overline{QL}} = \cos\frac{\psi}{2}.$$

Es ist nun

$$\overline{O-qr} = \frac{qr}{q+r}\sqrt{2};\quad \overline{OJ} = \overline{QJ} = \frac{q}{2}\sqrt{2}.$$

Ferner

$$\overline{JL} : \overline{J-qr} = \overline{OP} : \overline{P-qr}$$

$$\overline{JL} = \frac{(\overline{O-qr} - \overline{OJ})\cdot\overline{OP}}{\sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{O-qr}^2}} = \frac{\left(\frac{qr}{q+r}\sqrt{2} - \frac{q}{2}\sqrt{2}\right)\cdot p}{\sqrt{p^2 + \frac{2q^2r^2}{(q+r)^2}}} = \frac{p\cdot\frac{q}{2}\sqrt{2}\cdot|r-q|}{\sqrt{2q^2r^2 + p^2(q+r)^2}}.$$

Also

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{\overline{JL}}{\sqrt{\overline{JL}^2 + \overline{JQ}^2}} = \frac{p\cdot\frac{q}{2}\sqrt{2}\cdot|r-q|}{\sqrt{\frac{\sqrt{2q^2r^2+p^2(q+r)^2}}{\frac{p^2q^2}{2}(r-q)^2} + \frac{q^2}{2}}}$$

$$= \frac{p\cdot|r-q|}{\sqrt{p^2(r^2+q^2-2qr) + 2q^2r^2 + p^2(q^2+r^2+2qr)}}$$

$$= \frac{p\cdot|r-q|}{\sqrt{2}\sqrt{p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2}}.$$

Unsere speziellen Werte eingesetzt:

4. Winkel an der Kante $\overline{A-bc}$: $\cos\frac{\psi_1}{2} = \frac{n-m}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}$

5. Winkel an der Kante $\overline{B-ac}$: $\cos\frac{\psi_2}{2} = \frac{m(n-1)}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}$

6. Winkel an der Kante $\overline{C-ab}$: $\cos\frac{\psi_3}{2} = \frac{n(m-1)}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}$

7. Winkel an der Kante $\overline{A-b\bar{c}}$: $\cos\frac{\psi_4}{2} = \frac{n+m}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}$

8. Winkel an der Kante $\overline{B-a\bar{c}}$: $\cos\frac{\psi_5}{2} = \frac{m(n+1)}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}$

9. Winkel an der Kante $\overline{C-a\bar{b}}$: $\cos\frac{\psi_6}{2} = \frac{n(m+1)}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}$

Die Vergleichung dieser Werte ergibt:

$\varphi_1 = \varphi_2$, wenn $n = m$

$\varphi_1 = \varphi_3$, „ $n = m = 1$

$\varphi_1 = \psi_1$, „ $n = m(\sqrt{2}+1)$

$\varphi_1 = \psi_2$, „ $n = \sqrt{2}+1$

$\varphi_1 = \psi_3$, „ $n = \frac{m\sqrt{2}}{m-1}$

($\varphi_1 = \psi_4$, unmöglich, da $m(\sqrt{2}-1) < n$)

($\varphi_1 = \psi_5$, „ , „ $\sqrt{2} < n+1$)

($\varphi_1 = \psi_6$, „ , „ $m(\sqrt{2}-n) < n$)

$\varphi_2 = \varphi_3$, wenn $m = 1$

($\varphi_2 = \psi_1$, unmöglich, da $n\sqrt{2} > n-m$)

$\varphi_2 = \psi_2$, wenn $n = \frac{m}{m-\sqrt{2}}$

$\varphi_2 = \psi_3$, „ $m = \sqrt{2}+1$

$\varphi_2 = \psi_4$, „ $n = \frac{m}{\sqrt{2}-1}$

$\varphi_2 = \psi_5$, „ $n = \frac{m}{\sqrt{2}-m}$

($\varphi_2 = \psi_6$, unmöglich, da $\sqrt{2} < m+1$)

($\varphi_3 = \psi_1$, „ , „ $mn\sqrt{2} > n-m$)

($\varphi_3 = \psi_2$, „ , „ $mn\sqrt{2} > mn-m$)

($\varphi_3 = \psi_3$, „ , „ $mn\sqrt{2} > mn-n$)

$\varphi_3 = \psi_4$, wenn $n = \frac{m}{m\sqrt{2}-1}$

$\varphi_3 = \psi_5$, „ $n = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$\varphi_3 = \psi_6$, „ $m = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$\psi_1 = \psi_2$, „ $m = 1$

$\psi_1 = \psi_3$, „ $n = \frac{m}{2-m}$

$\psi_1 = \psi_4$, „ $n = \infty$, m endlich

$\psi_1 = \psi_5$, „ $n = \infty$, $m = 1$

($\psi_1 = \psi_6$, unmöglich, da $-m < mn$)

$\psi_2 = \psi_3$, wenn $n = m$

$\psi_2 = \psi_4$, „ $n = \frac{2m}{m-1}$

$\psi_2 = \psi_5$, „ $n = \infty$, m beliebig

$\psi_2 = \psi_6$, „ $n = m = \infty$

$\psi_3 = \psi_4$, wenn $n = \frac{m}{m-2}$

$\psi_3 = \psi_5$, „ $n = m = \infty$

$\psi_3 = \psi_6$, „ $n = m = \infty$

$\psi_4 = \psi_5$, „ $m = 1$

$\psi_4 = \psi_6$, „ $n = m = 1$

$\psi_5 = \psi_6$, „ $n = m$.

Daraus folgen die weiteren Beziehungen:

$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$, wenn $n = m = 1$

$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_2$, „ $n = m = \sqrt{2} + 1$

$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_3$, „ $n = m = \sqrt{2} + 1$

$\varphi_1 = \psi_1 = \psi_2$, „ $n = \sqrt{2} + 1,\ m = 1$

$\varphi_1 = \psi_1 = \psi_3$, „ $n = 2\sqrt{2}+1,\ m = \dfrac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$

$\varphi_1 = \psi_2 = \psi_3$, „ $n = m = \sqrt{2} + 1$

$\varphi_2 = \varphi_3 = \psi_4$, „ $n = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1},\ m = 1$

$\varphi_2 = \varphi_3 = \psi_5$, „ $n = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1},\ m = 1$

$\varphi_2 = \psi_2 = \psi_3$, „ $n = m = \sqrt{2} + 1$

$\varphi_2 = \psi_2 = \psi_4$, „ $n = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1},\ m = 2\sqrt{2}-1$

$\varphi_2 = \psi_2 = \psi_5$, „ $n = \infty,\ m = \sqrt{2}$

$\varphi_2 = \psi_3 = \psi_4$, „ $n = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},\ m = \sqrt{2} + 1$

$\varphi_2 = \psi_4 = \psi_5$, „ $n = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1},\ m = 1$

$\varphi_3 = \psi_4 = \psi_5$, „ $n = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1},\ m = 1$

$\varphi_3 = \psi_5 = \psi_6$, wenn $n = m = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3$, „ $n = m = 1$

$\psi_1 = \psi_2 = \psi_4$, „ $n = \infty,\ m = 1$

$\psi_1 = \psi_2 = \psi_5$, „ $n = \infty,\ m = 1$

$\psi_1 = \psi_3 = \psi_4$, „ $n = \infty,\ m = 2$

$\psi_1 = \psi_4 = \psi_5$, „ $n = \infty,\ m = 1$

$\psi_2 = \psi_3 = \psi_4$, „ $n = m = 3$

$\psi_2 = \psi_3 = \psi_5$, „ $n = m = \infty$

$\psi_2 = \psi_3 = \psi_6$, „ $n = m = \infty$

$\psi_2 = \psi_4 = \psi_5$, „ $n = \infty,\ m = 1$

$\psi_2 = \psi_5 = \psi_6$, „ $n = m = \infty$

$\psi_3 = \psi_5 = \psi_6$, „ $n = m = \infty$

$\psi_4 = \psi_5 = \psi_6$, „ $n = m = 1.$

Hieraus geht endlich noch hervor:

$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_2 = \psi_3$, wenn $n = m = \sqrt{2} + 1$

$\varphi_2 = \varphi_3 = \psi_4 = \psi_5$, „ $n = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1},\ m = 1$

$\psi_1 = \psi_2 = \psi_4 = \psi_5$, „ $n = \infty,\ m = 1$

$\psi_2 = \psi_3 = \psi_5 = \psi_6$, „ $n = m = \infty.$

Nur die drei- und viergliedrigen Beziehungen kommen für die Polyeder mit geschlossener Begrenzungsfläche in Betracht; die zweigliedrigen haben für uns eine Bedeutung nur, insofern sie die halbgeschlossenen von Parallelstreifen begrenzten Vielflache betreffen (da wir auf die offenen Gestalten nicht näher eingehen).

Man sieht also aus dem obigen, dafs für das allgemeine Hexakisoktaeder nur $\varphi_1 = \psi_1 = \psi_3$; $\varphi_2 = \psi_2 = \psi_4$ und $\varphi_2 = \psi_3 = \psi_4$ möglich sind.

Die übrigen Relationen gelten nur für Spezialisierungen des Hexakisoktaeders und sind deshalb erst in den folgenden §§ zu besprechen.

Vom allgemeinen Hexakisoktaeder gibt es demnach folgende halbreguläre Varietäten:

a) $\varphi_1 = \psi_1 = \psi_3$ Grundform 1 (Typus I, 1) für $n = 2\sqrt{2} + 1$; $m = \dfrac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+1}$

[$\varphi_2 = \psi_2 = \psi_4$ ergibt kein halbreguläres Polyeder, da die Grundform 11, die durch diese Relation bestimmt ist, nicht konvex ist; man würde also nur ein Polyeder erhalten, bei dem zwei Flächenwinkel gleich sind, der dritte die Ergänzung zu 360° bildet.]

b) $\varphi_2 = \psi_3 = \psi_4$ Polyeder 1. 2. 5. 7 (Typus II, 15) ($\triangle$) für $n = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; $m = \sqrt{2}+1$.

(NB. Auch die drei von Parallelstreifen begrenzten Körper bilden allgemein keine Archimedeische Varietät.)

§ 7.

Die Spezialisierungen des Hexakisoktaeders.
(Holoedrisch-holosymmetrische Formen.)

Die Spezialisierungen des Hexakisoktaeders entstehen bekanntlich durch besondere Annahme der Parameter, sei es dadurch, dafs man zwei bez. alle drei identisch werden läfst, oder dafs man irgend welchen von ihnen unendlich grofse Werte zuerteilt. Auf diese Weise wird bewirkt, dafs dafs die Polyederflächen auf gewissen Symmetrieebenen senkrecht stehen, so dafs also je zwei oder mehr Polyederflächen zusammenfallen. Zugleich rückt natürlich in diese Symmetrieebenen der Berührungspunkt H der eingeschriebenen Kugel und die ganze Schnittfigur einer Fläche wird symmetrisch in bezug auf die Spuren $s_0, s_0' \ldots$ der genannten Symmetrieebenen; diese Spuren $s_0, s_0' \ldots$ selbst sind jedoch nicht gleichzeitig Schnittlinien von Polyederflächen (denn der Schnitt von zusammenfallenden Ebenen ist unbestimmt). Ferner treffen sich in den auf $s_0, s_0' \ldots$ gelegenen Achsenhauptpunkten nur mehr halb so viel Flächen als beim allgemeinen Hexakisoktaeder. Dagegen bleibt die Zahl der Flächen, die sich aufserhalb $s_0, s_0' \ldots$ in irgend einem Achsenhauptpunkte schneiden, unverändert.

Da nun die Anzahl der Polyederflächen auf den $n$ten Teil reduziert wird, so mufs, um jeder Zelle die gleiche Anzahl von Flächenstücken zuteilen zu können, d. h. um die Grundbedingung eines jeden Polyeders zu erfüllen, dafs es überall von gleicher Art ist, die Zahl der verwendeten Zellformen ein Vielfaches von n sein. Soll die Symmetrie des allgemeinen Hexakisoktaeders erhalten bleiben, so mufs, nach dem oben gesagten, das Begrenzungspolygon symmetrisch zu den Spuren $s_0, s_0' \ldots$ derjenigen Sym-

metrieebenen sein, auf denen die Polyederfläche senkrecht steht. Wie verhält es sich aber, wenn das Polygon nicht oder nur teilweise nach den genannten Spurlinien symmetrisch ist? Natürlich ist dann die Symmetrie des ganzen Polyeders vermindert. Es ist nun die Frage, ob und unter welchen Bedingungen derartige Gestalten möglich sind. Wenn man ein beliebiges Polyeder des allgemeinen Hexakisoktaeders in der angegebenen Weise spezialisieren will, so kann man dies durch eine kontinuierliche Änderung der Parameter erreichen; also kann hierbei keine Symmetrieebene verloren gehen. Nun zerfallen aber, wie wir gesehen haben, eine gewisse Anzahl von Polyedern des allgemeinen Hexakisoktaeders. Die Teilpolyeder sind ebenfalls gleichflächige Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten, es sind die sogenannten meroedrischen Formen (vgl. § 8). Wir denken uns nun diese meroedrischen Polyeder spezialisiert. Sofern bei ihnen die $s_0, s_0' \ldots$ als Symmetriekanten fehlen, kann sich bei der Spezialisierung die Anzahl ihrer Flächen nicht ändern, d. h. ein Zusammenfallen von Flächen ist ausgeschlossen. Wenn also die Anzahl der Flächen dieser meroedrischen Polyeder $\frac{48}{n}$ beträgt, so sind ihre Spezialisierungen nicht mehr meroedrische, sondern holoedrische Formen von geringerer Symmetrie als das allgemeine Hexakisoktaeder. Das Analoge gilt, wenn nur ein Teil der $s_0, s_0' \ldots$ als Symmetriekanten fehlen, so dafs m von ihnen vorhanden sind. Wenn die allgemeine meroedrische Gestalt $48 \cdot \frac{2^m}{n}$ Flächen enthält, so ergibt die Spezialisierung ebenfalls derartige holoedrische Formen von $\frac{48}{n}$ Flächen.

Noch etwas ist zu beachten: Bei der Spezialisierung werden gewisse offene Zellformen ($l_1, l_2 \ldots$) in halbgeschlossene verwandelt. Es können also halbgeschlossene gleichflächige Polyeder von geringerer Symmetrie gebildet werden, die kein Analogon bei den allgemeinen meroedrischen Formen haben. Wenn das (zu s_0 nicht symmetrische) Polygon, das irgend welche l_i enthält, durch Spiegelung an einem s_0 in die Lage eines Polygons gebracht werden kann, das keine der neuen Zellformen l mehr besitzt, so entsteht nur die Gegenform eines aus meroedrischen Gestalten schon abgeleiteten Polyeders. Ist eine solche Transformation nicht möglich, so sind die für das Zerfallen aufgestellten Kriterien in Betracht zu ziehen; d. h. es ist zu untersuchen, ob ein solches Polygon, ohne die zu $s_0, s_0' \ldots$ symmetrische Lage einzunehmen,

die Begrenzungsfläche eines (halbgeschlossenen) gleichflächigen Polyeders bilden kann. In diesem Sinne sind daher ganz allgemein die in § 5 angegebenen Kriterien zu erörtern:

ad 1, 2, 3 und 4: Rückt der projizierende Punkt R' ins Unendliche, so hört die Spur der zur Achse von R' senkrechten Symmetrieebene auf, gleichzeitig Schnittlinie einer Polyederfläche zu sein. — Wenn einer der beiden (in gleicher Hauptsymmetriekante liegenden) Punkte T ins Unendliche rückt, so verschwindet der andere (T_0) als Eckpunkt; denn die Achsen der beiden stehen aufeinander senkrecht. Die Strecke RR wird also durch keinen auf einer Achse gelegenen Eckpunkt geteilt und es ist deshalb nicht möglich, ein zu $R'T_0$ unsymmetrisches Polygon aus den hier in Betracht kommenden Punkten zu formieren, das [wegen des auf der vorigen Seite, Zeile 8—4 v. u. gesagten] gleichzeitig die beiden ins Unendliche gehenden Ebenenteile $R'RT_\infty$ enthält. — Wenn endlich einer der beiden in der genannten Hauptsymmetriekante gelegenen Punkte R_d ins Unendliche rückt, so kommt die den anderen Punkt (R_d^0) ausschneidende Symmetrielinie $R'R_d^0$ als Spur einer Polyederfläche in Wegfall. Deshalb kann aus den hier in Betracht kommenden Punkten kein zu $R'R_d^0$ unsymmetrisches Polygon gebildet werden, das die beiden ins Unendliche sich erstreckenden Ebenenteile $R'TR_\infty$ enthält. — Daraus ergibt sich, dafs die Fälle 1, 2, 3 u. 4 für den angegebenen Zweck nicht berücksichtigt zu werden brauchen bei denjenigen Spezialisierungen, deren Schnittfigur nur nach einer Symmetrielinie symmetrisch ist (Tetrakishexaeder, Ikositetraeder, Triakisoktaeder). Für die übrigen Spezialisierungen können dagegen hierhergehörige teilweise unsymmetrische Polygone wohl existieren.

ad 5 und 6: Hier sind die verlangten Polygone möglich; sie werden zugleich mit den anderen, nicht ins Unendliche sich erstreckenden Begrenzungsflächen des Falles 5. und 6. abgeleitet durch Betrachtung der nach Wegnahme der Hauptsymmetrielinien übrigbleibenden Schnittfigur.

Die Parallelstreifen sind besonders zu untersuchen, wenn nicht ein S der unendlich ferne Punkt ist. —

Dafs die holoedrischen Polyeder geringerer Symmetrie, die in angegebener Weise entstehen, auch die einzig möglichen sind, ersieht man

ohne weiteres. Denn jedes andere unsymmetrische Polygon hat ein Analogon in der Begrenzungsfläche eines nicht zerfallenden allgemeinen Hexakisoktaeders. Durch die Deckbewegungen, die sich bei der Spezialisierung nicht ändern, wird die Begrenzungsfläche dieses allgemeinen Hexakisoktaeders in alle 48 Lagen gebracht. Bei der Spezialisierung fallen je n von ihnen in eine Ebene und bilden zusammen ein symmetrisches Polygon. Also ist ein gleichflächiges Polyeder, das als Begrenzungsfläche jenes unsymmetrische Polygon ohne seine symmetrischen Wiederholungen enthält, unmöglich. Q. e. d.

Zur genauen Unterscheidung wollen wir die holoedrischen Polyeder mit der Symmetrie des allgemeinen Hexakisoktaeders vollsymmetrisch oder holosymmetrisch nennen, die mit verminderter Symmetrie dagegen teilsymmetrisch oder merosymmetrisch.

In diesem § sollen nur die holoedrisch-holosymmetrischen Polyeder behandelt werden, d. h. die eigentlichen Spezialisierungen des Hexakisoktaeders. Die holoedrisch-merosymmetrischen Gestalten sollen dagegen erst nach der Ableitung der meroedrischen Körper betrachtet werden (in § 9), damit nicht spezielle Formen den allgemeineren vorangehen. —

Wir wollen nunmehr die einzelnen Gattungen näher untersuchen.

1. Das Tetrakishexaeder $(\infty : m : 1)$.

Wegen $n = \infty$ rückt der Punkt C ins Unendliche. Die Polyederfläche steht deshalb senkrecht zur Symmetrieebene, deren Spur AB ist. Also AC und BC, sowie $ab - C$ und $a\bar{b} - C \perp AB$ (Fig. 4).

Das Einsetzen des speziellen Wertes ergibt:

$$OS_1 \equiv OS_2 = \frac{m}{m+1}\, a\sqrt{3}$$

$$OS_3 \equiv OS_4 = \frac{m}{m-1}\, a\sqrt{3}.$$

Da $mn > n + m$ (für $\infty > m > 1$), so gehört das Tetrakishexaeder zur Untergattung α des Hexakisoktaeders.

$$O - ab = \frac{m}{m+1}\, a\sqrt{2};\quad O - a\bar{b} = \frac{m}{m-1}\, a\sqrt{2}$$

$$O - ac \equiv O - a\bar{c} = a\sqrt{2}$$

$$O - bc \equiv O - b\bar{c} = ma\sqrt{2}.$$

(NB. ab und $a\bar{b}$ treten nicht als Eckpunkte auf!)

Es ist also:

$$O - ab < \begin{Bmatrix} O - ac \\ \equiv O - a\bar{c} \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} O - a\bar{b} \\ O - bc \equiv O - b\bar{c} \end{Bmatrix}$$

Ferner

$$O - bc \equiv O - b\bar{c} \gtreqless O - a\bar{b}, \text{ wenn } m \gtreqless 2.$$

In der Schnittfigur existieren 18 geschlossene Zellen (sechs davon halbgeschlossen) und zwölf offene Zellen (also sechs transgredient). Je zwei zur Linie AB symmetrisch gelegene sind spiegelbildlich gleich und zusammengehörig, so dafs sich die Zahl der verschiedenen Zellformen auf die Hälfte reduziert.

Die geschlossenen (vollsymmetrischen) Grundformen sind also folgende neun:

a) 1 ± 7; b) 2 ± 8; c) 3 ± 9; d) 4 ± 10; e) 11 ± 14; f) 12 ± 15; g) 5 ± 18;
h) $6 + 20$; i) $13 + 30$.

g), h) und i) sind halbgeschlossen.

Bei a), c) und h) sind die Begrenzungsflächen gleichschenklige Dreiecke.

Für irgend eine Familie (deren es ∞^1 gibt) ist also die Anzahl aller möglichen geschlossenen gleichflächigen vollsymmetrischen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten:

$$\text{für } A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6\,(+3) + 15\,(+21) + 20\,(+64) + 15\,(+111) + 6\,(+120) + 1\,(+83) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 7 & 8 & 9 \\ + 0\,(+36) + 0\,(+9) + 0\,(+1) \end{matrix}$$

$$= 2^6 - 1 + (2^9 - 2^6) = 63\,(+448)$$

$$\text{zusammen} \quad = 2^9 - 1 \qquad = 511.$$

Die in Klammern stehenden Zahlen geben die halbgeschlossenen Formen an.

Anzahl der hierhergehörigen offenen Gestalten ohne geschlossenes Kernpolyeder:
$2^6 - 1 = 63$

" " " " " mit geschlossenem Kernpolyeder:
$2^{15} - 2^6 - 2^9 + 1 = 32\,193$

" " " " " überhaupt: $2^{15} - 2^9 = 32\,256$

" " " transgredienten Polyeder ohne geschlossenes Kernpolyeder:
$2^3 - 1 = 7$

" " " " " mit geschlossenem Kernpolyeder:
$2^{12} - 2^9 - 2^3 + 1 = 3577$

" " " geschlossenen und transgredienten Polyeder zusammen:
$2^{12} - 1 = 4095$.

Die allophänen Typen ergeben sich unmittelbar durch Spezialisierung aus den allgemeinen Zusammenstellungen (s. S. 85 ff.); fast einfacher ist es jedoch, nach den früher angegebenen Methoden die allophänen Typen neu abzuleiten.

I.

Die Aufsenfläche wird von einer einzigen Zellform gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	
a)	(1 = 7)	—	$2^0 = 1$	ganz geschlossen
b)	(2 = 8)	(1 = 7)	$2^1 = 2$	ganz geschlossen
c)	(3 = 9)	(1 = 7)	$2^1 = 2$	ganz geschlossen
d)	(4 = 10)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9)	$2^3 = 8$	ganz geschlossen
e)	(11 = 14)	(1 = 7), (2 = 8)	$2^2 = 4$	ganz geschlossen
f)	(12 = 15)	(1 = 7), (2 = 8), (11 = 14)	$2^3 = 8$	ganz geschlossen
g)	(5 = 18)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9)	$2^3 = 8$	halb-geschlossen
h)	(6 = 20)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9), (4 = 10), (5 = 18)	$2^5 = 32$	halb-geschlossen
i)	(13 = 30)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9), (5 = 18), (11 = 14)	$2^5 = 32$	halb-geschlossen

Gesamtzahl der hierhergehörigen Polyeder: 25 (+ 72) = 97.

II.

Die Aufsenfläche wird von zwei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	
a)	(2=8), (3=9)	(1 = 7)	$2^1 = 2$	ganz geschlossen
b)	(3=9), (11=14)	(1 = 7), (2 = 8)	$2^2 = 4$	ganz geschlossen
c)	(3=9), (12=15)	(1 = 7), (2 = 8), (11 = 14)	$2^3 = 8$	ganz geschlossen
d)	(4=10), (11=14)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9)	$2^3 = 8$	ganz geschlossen
e)	(4=10), (12=15)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9), (11 = 14)	$2^4 = 16$	ganz geschlossen
f)	(4=10), (5=18)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9)	$2^3 = 8$	halbgeschlossen
g)	(4=10), (13=30)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9), (5 = 18), (11 = 14)	$2^5 = 32$	halbgeschlossen
h)	(5=18), (11=14)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9)	$2^3 = 8$	halbgeschlossen
i)	(5=18), (12=15)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9), (11 = 14)	$2^4 = 16$	halbgeschlossen
k)	(6=20), (11=14)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9), (4 = 10), (5 = 18)	$2^5 = 32$	halbgeschlossen
l)	(6=20), (12=15)	(1=7), (2=8), (3=9), (4=10), (5=18), (11=14)	$2^6 = 64$	halbgeschlossen
m)	(6=20), (13=30)	(1=7), (2=8), (3=9), (4=10), (5=18), (11=14)	$2^6 = 64$	halbgeschlossen
n)	(12=15), (13=30)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9), (5 = 18), (11 = 14)	$2^5 = 32$	halbgeschlossen

Gesamtzahl der hierhergehörigen Polyeder: 38 (+ 256) = 294.

III.

Die Aufsenfläche wird von drei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Eine der drei Zellformen der Aufsenfläche wird verdeckt, wenn	Die verdeckte Zellform	Die Außenfläche geht über in den Typus	
a)	(4 = 10). (5 = 18). (11 = 14)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9)	$2^3 = 8$	—	—	—	halbgeschlossen.
b)	(4 = 10). (5 = 18). (12 = 15)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9), (11 = 14)	$2^4 = 16$	$m(m-1) \leq 1$	(4 = 10)	II, i	
c)	(4 = 10). (12 = 15). (13 = 30)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9), (5 = 18), (11 = 14)	$2^5 = 32$	$m(m-1) \leq 1$	(4 = 10)	II, n	
d)	(6 = 20). (12 = 15). (13 = 30)	(1 = 7), (2 = 8), (3 = 9), (4 = 10), (5 = 18), (11 = 14)	$2^6 = 64$	—	—	—	

Die Anzahl der hierhergehörigen (halbgeschlossenen) Polyeder beträgt im Maximum: 120.

Hiermit sind alle möglichen allophänen Typen abgeleitet; im ganzen sind es 11 ganzgeschlossene und 15 bez. 13 halbgeschlossene Typen. —

Die konvexen Polyeder ergeben sich aus der Tabelle des § 4, wenn man dort diejenigen Polyeder aufsucht, welche Paare der angegebenen zusammengehörigen Zellformen enthalten; nur 5, 6 und 13 dürfen dort einzeln vorkommen, da bei dem allgemeinen Hexakisoktaeder 18, 20 und 30 offen sind. Doch führt die direkte Ableitung vielleicht rascher zum Ziele. — Ein „!“ bezeichnet die halbgeschlossenen Formen, ein „+“ die zerfallenden Formen; „$\frown$“ kennzeichnet homologe, symmetrische Ecken.

Tabelle der konvexen Polyeder.

Art	Name	Typus	$+\triangle$ $\square$	Art der Ecken
1	**(1 = 7)**	I, a	$\triangle$	4_1; $\overset{\frown}{6_1, 6_1}$
2	(1 = 7). **(2 = 8)**	I, b	$\square$	$\overset{\frown}{6_2, 6_2}$; $\overset{\frown}{4_1, 4_1}$
„	(1 = 7). **(3 = 9)**	I, c	$\square$	$4_1, 4_1$; $\overset{\frown}{6_2, 6_2}$
3	(1 = 7). **(2 = 8)**. **(3 = 9)**	II, a	$\underset{+}{\triangle}$	4_1; $\overset{\frown}{4_1, 4_1}$
„	(1 = 7). (2 = 8). **(5 = 18)**!	I, g	$\parallel +$	$(\overset{\frown}{8_1 \equiv 8_1})_\infty$
„	(1 = 7). (2 = 8). **(11 = 14)**	I, e	—	4_3; $\overset{\frown}{6_1, 6_1}$, $\overset{\frown}{6_2, 6_2}$
„	(1 = 7). (3 = 9). **(4 = 10)**	I, d	$\underset{+}{\triangle}$	4_1; $\overset{\frown}{4_1, 4_1}$

Art	Name	Typus	+△ □	Art der Ecken
4	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (**4 = 10**)	I, d	—	$\widehat{6_4, 6_4}$; $\widehat{4_1, 4_1}$, $\widehat{4_1, 4_1}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (**5 = 18**)!	I, g	—	$(\widehat{8_1 = 8_1})_\infty$, 4_1; $\widehat{6_4, 6_4}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (**3 = 9**). (**11 = 14**)	II, b	—	4_1, 4_3; $\widehat{6_1, 6_1}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (**5 = 18**). (**11 = 14**)!	II, h	—	$(\widehat{8_1 = 8_1})_\infty$, 4_3; $\widehat{6_1, 6_1}$; $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (11 = 14). (**12 = 15**)	I, f	□	$\widehat{6_2, 6_2}$, $\widehat{6_2, 6_2}$
5	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (**4 = 10**). (**5 = 18**)!	II, f	—	$(\widehat{8_1 = 8_1})_\infty$; $\widehat{6_5, 6_5}$; $\widehat{4_1, 4_1}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (**4 = 10**). (**11 = 14**)	II, d	—	4_3; $\widehat{6_1, 6_1}$, $\widehat{6_5, 6_5}$; $\widehat{4_1, 4_1}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (**5 = 18**). (**11 = 14**)!	II, h	—	$(\widehat{8_1 = 8_1})_\infty$, $4_1, 4_3$; $\widehat{6_1, 6_1}, \widehat{6_4, 6_4}$; $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (**3 = 9**). (11 = 14). (**12 = 15**)	II, c	△	4_1; $\widehat{6_2, 6_2}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (**5 = 18**). (11 = 14). (**12 = 15**)!	II, i	—	$(\widehat{8_1 = 8_1})_\infty$; $\widehat{6_2, 6_2}$; $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (5 = 18). (11 = 14). (**13 = 30**)!	I, i	—	$(\widehat{8_2 = 8_2})_\infty$, 4_3; $\widehat{6_2, 6_2}$
6	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (4 = 10). (5 = 18). (**6 = 20**)!	I, h	‖ +	$(\widehat{8_2 = 8_2})_\infty$
„	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (**4 = 10**). (**5 = 18**). (**11 = 14**)!	III, a	—	$(\widehat{8_1 = 8_1})_\infty, 4_3$; $\widehat{6_1, 6_1}, \widehat{6_5, 6_5}$; $\widehat{4_1, 4_1}, \widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (**4 = 10**). (11 = 14). (**12 = 15**)	II, e	—	$\widehat{6_2, 6_2}$, $\widehat{6_4, 6_4}$; $\widehat{4_1, 4_1}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (**5 = 18**). (11 = 14). (**12 = 15**)!	II, i	—	$(\widehat{8_1 = 8_1})_\infty$, 4_1; $\widehat{6_2, 6_2}$, $\widehat{6_4, 6_4}$; $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (5 = 18). (11 = 14). (**13 = 30**)!	I, i	—	$(\widehat{8_2 = 8_2})_\infty$, 4_1, 4_3; $\widehat{6_2, 6_2}$, $\widehat{6_4, 6_4}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (5 = 18). (11 = 14). (**12 = 15**). (**13 = 30**)!	II, n	‖ +	$(\widehat{8_2 = 8_2})_\infty$
7	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (4 = 10). (5 = 18). (**6 = 20**). (**11 = 14**)!	II, k	—	$(\widehat{8_2 = 8_2})_\infty$, 4_3; $\widehat{6_1, 6_1}$; $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (*4 = 10*). (**5 = 18**). (11 = 14). (**12 = 15**)!	III, b; II, i	—	$(\widehat{8_1 = 8_1})_\infty$; $\widehat{6_2, 6_2}$, $\widehat{6_5, 6_5}$; $\widehat{4_1, 4_1}$, $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (**4 = 10**). (5 = 18). (11 = 14). (**13 = 30**)!	II, g	—	$(\widehat{8_2 = 8_2})_\infty$, 4_3; $\widehat{6_2, 6_2}$, $\widehat{6_5, 6_5}$; $\widehat{4_1, 4_1}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (5 = 18). (11 = 14). (**12 = 15**). (**13 = 30**)!	II, n	—	$(\widehat{8_2 = 8_2})_\infty$, 4_1; $\widehat{6_4, 6_4}$
8	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (4 = 10). (5 = 18). (**6 = 20**). (11 = 14). (**12 = 15**)!	II, l	—	$(\widehat{8_2 = 8_2})_\infty$; $\widehat{6_2, 6_2}$; $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (4 = 10). (5 = 18). (**6 = 20**). (11 = 14). (**13 = 30**)!	II, m	—	$(\widehat{8_3 = 8_3})_\infty$, 4_3; $\widehat{6_2, 6_2}$
„	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (*4 = 10*). (5 = 18). (11 = 14). (**12 = 15**). (**13 = 30**)!	III, c; II, n	—	$(\widehat{8_2 = 8_2})_\infty$; $\widehat{6_5, 6_5}$; $\widehat{4_1, 4_1}$
9	(1 = 7). (2 = 8). (3 = 9). (4 = 10). (5 = 18). (**6 = 20**). (11 = 14). (**12 = 15**). (**13 = 30**)!	III, d	‖ +	$(\widehat{8_3 = 8_3})_\infty$

Es existieren demnach 12 ganzgeschlossene und 20 halbgeschlossene konvexe Polyeder. Konvexe Begrenzungsfläche besitzen sieben ($4\triangle + 3\square$) bez. vier ($\|$) von ihnen.

Die Dreiecke sind alle gleichschenklig, die konvexen Vierecke sind Trapeze bez. Deltoide. —

Da für die hierhergehörigen Spezialisierungen die Symmetrie ungeändert bleibt, so ergeben sich die „konzentrischen Anordnungen“ unmittelbar auf Grund der in § 5 angestellten Betrachtungen:

1. Die Begrenzungsfläche ist ein Dreieck mit zwei in derselben Hauptsymmetrieebene gelegenen Punkten T und dem aufserhalb dieser Symmetrieebene sich befindenden Punkte R_d als Ecken. Der Körper zerfällt in drei achtflächige kongruente senkrechte Bipyramiden des quadratischen Systems (Oktaide). Gemäfs der Anzahl der im Endlichen gelegenen Punkte R sind zwei Gestalten möglich, die beide konvex sind:

$(1 = 7).\ (2 = 8).\ (\mathbf{3 = 9})$ Typus: II, a; Ecken: 4_1; $\widehat{4_1, 4_1}$; $A = 3,\ A' = 1$

$(1 = 7).\ (3 = 9).\ (\mathbf{4 = 10})$ „ I, d; „ 4_1; $\widehat{4_1, 4_1}$; $A = 3,\ A' = 1.$

1'. Die Begrenzungsfläche ist ein unendlicher Parallelstreifen; einziger Eckpunkt C_∞; konzentrische Anordnung von drei bez. sechs untereinander kongruenten, senkrechten achtflächigen bez. vierflächigen unendlichen Prismen, die je einer Hauptachse parallel sind. Die Anzahl der möglichen Gestalten beträgt $\binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 7$; es sind folgende:

$(1 = 7).\ (2 = 8).\ (\mathbf{5 = 18})$ Typus: I, g Ecken: $(\widehat{8_1 \equiv 8_1})_\infty$; $A = 3,\ A' = 1$ konvex

$(3 = 9).\ (4 = 10).\ (\mathbf{6 = 20})$ „ I, h „ $(\widehat{8_1 \equiv 8_1})_\infty$; $A = 3,\ A' = 1,$ $(\overline{A} = 15,\ \overline{A}' = 5)$ nichtkonvex

$(11 = 14).\ (\mathbf{12 = 15}).\ (\mathbf{13 = 30})$ „ II, n „ $(\widehat{8_1 \equiv 8_1})_\infty$; $A = 3,\ A' = 1,$ $(\overline{A} = 15,\ \overline{A}' = 5)$ nichtkonvex

$(1 = 7).\ (2 = 8).\ (3 = 9).\ (4 = 10).\ (5 = 18).\ (\mathbf{6 = 20})$ Typus: I, h Ecken: $(\widehat{8_2 \equiv 8_2})_\infty$; $A = 6,\ A' = 1$ konvex

$(1 = 7).\ (2 = 8).\ (5 = 18).\ (11 = 14).\ (\mathbf{12 = 15}).\ (\mathbf{13 = 30})$ Typus: II, n Ecken: $(\widehat{8_2 \equiv 8_2})_\infty$; $A = 6,\ A' = 1$ konvex

$(1 = 7).\ (2 = 8).\ (3 = 9).\ (4 = 10).\ (5 = 18).\ (\mathbf{6 = 20}).\ (11 = 14).\ (\mathbf{12 = 15}).\ (\mathbf{13 = 20})$ Typus: III, d Ecken: $(\widehat{8_3 \equiv 8_3})_\infty$; $A = 9,\ A' = 3$ konvex

$(3 = 9).\ (4 = 10).\ (\mathbf{6 = 20}).\ (11 = 14).\ (\mathbf{12 = 15}).\ (\mathbf{13 = 30})$ Typus: III, d Ecken: $((\widehat{8_1 \equiv 8_1}) \overset{+}{\equiv} (\widehat{8_1 \equiv 8_1}))_\infty$; $A = 6,\ A' = 2,\ (\overline{A} = 30,\ \overline{A}' = 10)$ nichtkonvex und diskontinuierliche Begrenzungsfläche.

Fall 2. und 3. des § 5 ist unmöglich; ersterer, weil die als Ecken verwendbaren Punkte T in der Schnittfigur paarweise zusammengehören; letzterer, weil AB nicht mehr Spur einer Polyederfläche ist. —

Die zu 2. und 3. gehörigen Formen sind in die Gestalten von 1'. und 1. übergegangen. Aus zwei Formen von 2. entstehen durch Symmetrie nach AB folgende neuen konzentrischen Anordnungen von drei kreuzförmigen achtflächigen Teilpolyedern mit nur in einem Punkt zusammenhängendem Begrenzungspolygon.

$(4 = 10).\ (5 = 18).\ (\mathbf{6 = 20})$ Typus: I, h Ecken: $\widehat{(8_2 \doteq 8_2)_\infty}$, $\widehat{4_1 \doteq 4_1}$; $\widehat{4_1, 4_1}$; $A = 3$, $A' = 1$, $(\overline{A} = 27,\ \overline{A}' = 9)$ nichtkonvex

$(2 = 8).\ (5 = 18).\ (\mathbf{6 = 20})$ „ I, h „ $\widehat{(8_2 \doteq 8_2)_\infty}$, $\widehat{4_1 \doteq 4_1}$; $\widehat{4_1, 4_1}$; $A = 3$, $A' = 1$, $(\overline{A} = 27,\ \overline{A}' = 9)$ nichtkonvex.

Fall 4. unmöglich, da AB als Spur einer Polyederfläche verschwindet; eine der hierhergehörigen Formen ist in die letzte Gestalt von 1'. übergegangen.

Fall 5. ist unmöglich, da wegen der Symmetrie der Begrenzungsfläche nach AB die beiden Teilpolyeder des allgemeinen Hexakisoktaeders in einen einfachen Körper zusammenfallen. Einige Formen sind in 1'. übergegangen.

Fall 6. ist ausgeschlossen, da das Tetrakishexaeder nur zu Untergattung α) gehört. —

Die hierhergehörigen halbregulären Körper ergeben sich unmittelbar aus den Betrachtungen des § 6; es existieren folgende:

a) $\psi_1 = \psi_3 = \psi_4$: Grundform $(\mathbf{1 = 7})$ für $n = \infty$, $m = 2$

b) $\varphi_2 = \psi_2 = \psi_5$: Polyeder $(1 = 7)$, $(\mathbf{2 = 8})$, $(\mathbf{3 = 9})$ Typus II, a $(\triangle)$ für $n = \infty$, $m = \sqrt{2}$; konzentrische Anordnung von drei regulären Oktaedern.

Aufserdem besitzen noch zwei von Parallelstreifen begrenzte konzentrische Anordnungen Archimedeische Varietäten (eigentlich konzentrische Anordnungen von regulären unendlichen Prismen); nämlich

c) $\varphi_2 = \psi_3$: $(1 = 7)$, $(2 = 8)$, $(\mathbf{5 = 18})$ Typus: I, g für $n = \infty$, $m = \sqrt{2} + 1$

d) $\varphi_3 = \psi_6$: $(1 = 7)$, $(2 = 8)$, $(3 = 9)$, $(4 = 10)$, $(5 = 18)$, $(6 = 20)$, $(11 = 14)$, $(\mathbf{12 = 15})$, $(\mathbf{13 = 30})$ Typus III, d für $n = \infty$, $m = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$. —

2. Das Ikositetraeder $(m : m : 1)$.

Da $n = m$ wird, steht die Polyederfläche senkrecht zu der Zwischensymmetrieebene, deren Spur $A—bc$ ist; die Schnittfigur wird symmetrisch zu $A—bc$. BC und $A—b\bar{c}$ stehen senkrecht auf $A—bc$; bc ist die Mitte von BC.

Das Einsetzen des speziellen Wertes ergibt (Fig. 5):

$$OS_1 = \frac{m}{m+2}\, a\sqrt{3}$$

$$OS_2 \equiv OS_3 = a\sqrt{3}$$

$$OS_4 = \frac{m}{m-2}\, a\sqrt{3} \text{ bez. } \frac{m}{2-m}\, a\sqrt{3}.$$

Das Ikositetraeder kann allen drei Untergattungen angehören; Kriterium: $m \gtreqless 2$.

$$O—ab \equiv O—ac = \frac{m}{m+1}\, a\sqrt{2}$$

$$O—bc = \frac{m}{2}\, a\sqrt{2}$$

$$O—a\bar{b} \equiv O—a\bar{c} = \frac{m}{m-1}\, a\sqrt{2}$$

$$O—b\bar{c} = \infty.$$

(NB! bc tritt nicht als Eckpunkt auf!)

Also

$$\left.\begin{matrix} O—ab \\ \equiv O—ac \end{matrix}\right\} < O—bc$$

$$\left.\begin{matrix} O—ab \\ \equiv O—ac \end{matrix}\right\} < \left\{\begin{matrix} O—a\bar{b} \\ \equiv O—a\bar{c} \end{matrix}\right\} < O—b\bar{c}.$$

Ferner

$$O—bc \gtreqless \left\{\begin{matrix} O—a\bar{b} \\ \equiv O—a\bar{c} \end{matrix}\right\}, \text{ wenn } m \gtreqless 3.$$

In der Schnittfigur existieren 16 (α, β) bez. 18 (γ) geschlossene Zellen (davon zwei bez. sechs halbgeschlossen) und 16 bez. 12 offene Zellen (also acht bez. sechs transgredient). Je zwei zur Linie $A—bc$ symmetrisch gelegene Zellen sind spiegelbildlich gleich und zusammengehörig, so dafs die Zahl der verschiedenen Zellformen auf die Hälfte reduziert wird.

Die geschlossenen vollsymmetrischen Grundformen sind also folgende:

a) $1 \doteq 2$; b) $3 \doteq 5$; c) $4 \doteq 6$; d) $7 + 11$; e) $8 \doteq 12$; f) $9 \doteq 13$; g) $10 \doteq 24$; h) $14 \doteq 15$; i) $16 \doteq 17$.

g) ist immer halbgeschlossen; h) und i), wenn $m = 2$.

Die Begrenzungsfläche von c) und i) ist ein gleichschenkliges Dreieck, von a) und h) ein Deltoid.

Die Anzahl der möglichen gleichflächigen vollsymmetrischen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten beträgt

in Untergattung α und β $(m \geqq 2)$:

für $A =$ 1 2 3 4 5 6 7 8

$7\,(+1) + 21\,(+7) + 35\,(+21) + 35\,(+35) + 21\,(+35) + 7\,(+21) + 1\,(+7) + 0\,(+1)$

$= 2^7 - 1 + (2^8 - 2^7) = 127\ (+128)$, zusammen $= 255$

bez. in Untergattung γ $(m = 2)$:

für $A =$ 1 2 3 4 5 6 7

$6\,(+3) + 15\,(+21) + 20\,(+64) + 15\,(+111) + 6\,(+120) + 1\,(+83) + 0\,(+36)$

8 9

$+ 0\,(+9) + 0\,(+1)$

$= 2^6 - 1\ (+ 2^9 - 2^6) = 63\ (+448)$, zusammen 511.

Anzahl der offenen Gestalten ohne geschloss. Kernpolyeder: für $m \geqq 2$: $2^8 - 1 = 255$

„ „ „ „ „ „ „ $m = 2$: $2^6 - 1 = 63$

„ „ „ „ mit „ „ „ $m \geqq 2$: $2^{16} - 2 \cdot 2^8 + 1 = 65025$

„ „ „ „ „ „ „ $m = 2$: $2^{15} - 2^6 - 2^9 + 1 = 32193$

„ „ transgredienten Polyeder ohne geschl. Kernpol.: „ $m \geqq 2$: $2^4 - 1 = 15$

„ „ „ „ „ „ „ $m = 2$: $2^3 - 1 = 7$

„ „ „ „ mit „ „ „ $m \geqq 2$: $2^{12} - 2^8 - 2^4 + 1 = 3825$

„ „ „ „ „ „ „ $m = 2$: $2^{12} - 2^9 - 2^3 + 1 = 3577$

„ „ geschl. u. transgredienten Polyeder zusammmen: immer: $2^{12} - 1 = 4095$.

Zusammenstellung der allophänen Typen.

I.

Die Aufsenfläche wird von einer einzigen Zellform gebildet.

Nr.	Zellform der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	$(1 = 2)$	—	$2^0 = 1$
b)	$(3 = 5)$	$(1 = 2)$	$2^1 = 2$
c)	$(4 = 6)$	$(1 = 2)$, $(3 = 5)$	$2^2 = 4$
d)	$(7 = 11)$	$(1 = 2)$	$2^1 = 2$
e)	$(8 = 12)$	$(1 = 2)$, $(7 = 11)$	$2^2 = 4$
f)	$(9 = 13)$	$(1 = 2)$, $(3 = 5)$, $(7 = 11)$	$2^3 = 8$
g)	$(10 = 24)$!	$(1 = 2)$, $(3 = 5)$, $(4 = 6)$, $(7 = 11)$, $(8 = 12)$, $(9 = 13)$	$2^6 = 64$
h)	$(14 = 15)\,\alpha\gamma$!	$(1 = 2)$, $(7 = 11)$, $(8 = 12)$	$2^3 = 8$
i)	$(16 = 17)\,\beta\gamma$!	$(1 = 2)$, $(3 = 5)$, $(4 = 6)$, $(7 = 11)$, $(9 = 13)$	$2^5 = 32$

Gesamtzahl der Polyeder: für $m > 2$: 29 (+ 64) = 93
„ $m < 2$: 53 (+ 64) = 117
„ $m = 2$: 21 (+ 104) = 125.

II.

Die Aufsenfläche wird von zwei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	(3 = 5). (7 = 11)	(1 = 2)	$2^1 = 2$
b)	(3 = 5). (8 = 12)	(1 = 2), (7 = 11)	$2^2 = 4$
c)	(4 = 6). (7 = 11)	(1 = 2), (3 = 5)	$2^2 = 4$
d)	(4 = 6). (8 = 12)	(1 = 2), (3 = 5), (7 = 11)	$2^3 = 8$
e)	(4 = 6). (9 = 13)	(1 = 2), (3 = 5), (7 = 11)	$2^3 = 8$
f)	(8 = 12). (9 = 13)	(1 = 2), (3 = 5), (7 = 11)	$2^3 = 8$
g)	(3 = 5). (14 = 15) $\alpha\gamma$!	(1 = 2), (7 = 11), (8 = 12)	$2^3 = 8$
h)	(4 = 6). (14 = 15) $\alpha\gamma$!	(1 = 2), (3 = 5), (7 = 11), (8 = 12)	$2^4 = 16$
i)	(9 = 13). (14 = 15) $\alpha\gamma$!	(1 = 2), (3 = 5), (7 = 11), (8 = 12)	$2^4 = 16$
k)	(10 = 24). (14 = 15)! $\alpha\gamma$	(1 = 2), (3 = 5), (4 = 6), (7 = 11), (8 = 12), (9 = 13)	$2^6 = 64$
l)	(8 = 12). (16 = 17) $\beta\gamma$!	(1 = 2), (3 = 5), (4 = 6), (7 = 11), (9 = 13)	$2^5 = 32$
m)	(10 = 24). (16 = 17)! $\beta\gamma$	(1 = 2), (3 = 5), (4 = 6), (7 = 11), (8 = 12), (9 = 13)	$2^6 = 64$
n)	(14 = 15). (16 = 17) γ!	(1 = 2), (3 = 5), (4 = 6), (7 = 11), (8 = 12), (9 = 13)	$2^6 = 64$

Es gehören also hierher: für $m > 2$: 74 (+ 64) = 138 Polyeder,
„ $m < 2$: 66 (+ 64) = 130 „ ,
„ $m = 2$: 34 (+ 264) = 298 „ .

III.

Die Aufsenfläche wird von drei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	(4 = 6). (8 = 12). (9 = 13)	(1 = 2), (3 = 5), (7 = 11)	$2^3 = 8$
b)	(4 = 6). (9 = 13). (14 = 15) $\alpha\gamma$!	(1 = 2), (3 = 5), (7 = 11), (8 = 12)	$2^4 = 16$
c)	(10 = 24). (14 = 15). (16 = 17) γ!	(1 = 2), (3 = 5), (4 = 6), (7 = 11), (8 = 12), (9 = 13)	$2^6 = 64$

Anzahl der hierhergehörigen Polyeder: für $m > 2$: 24
„ $m < 2$: 8
„ $m = 2$: 8 (+ 80).

Sonst sind keine allophänen Typen möglich.

Im ganzen existieren also für $m > 2$: 18 ganzgeschloss. und 2 halbgeschloss. Typen,
„ $m < 2$: 15 „ „ 2 „ „ ,
„ $m = 2$: 13 „ „ 12 „ „ . —

Die konvexen Polyeder.

Art	Name	Typus	$+\triangle\times\square$	Art der Ecken
1	**(1 = 2)**	I, a	$\square$	4_1; 3_1; $\widehat{4_1, 4_1}$
2	(1 = 2). **(3 = 5)**	I, b	—	$\widehat{8_1, 8_1}$, 4_1; 3_2
„	(1 = 2). **(7 = 11)**	I, d	$\underset{\times}{\triangle}$	$\widehat{6_1, 6_1}$, 3_1
3	(1 = 2). (3 = 5). **(4 = 6)**	I, c	$\underset{+}{\triangle}$	$\widehat{8_2, 8_2}$; 4_1
„	(1 = 2). **(3 = 5)**. (7 = 11)	II, a	—	$\widehat{8_1, 8_1}$; $\widehat{6_1, 6_1}$, 3_2; $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 2). (7 = 11). **(8 = 12)**	I, e	—	4_3; $\widehat{6_2, 6_2}$, 3_1; $\widehat{4_1, 4_1}$
4	(1 = 2). (3 = 5). **(4 = 6)**. **(7 = 11)**	II, c	—	$\widehat{8_2, 8_2}$; $\widehat{6_1, 6_1}$; $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). **(16 = 17)**	I, i ($\beta\gamma$)	$\square$	$\widehat{8_3, 8_3}$, 4_1; 3_1
„	(1 = 2). **(3 = 5)**. (7 = 11). **(8 = 12)**	II, b	—	$\widehat{8_1, 8_1}$, 4_3; $\widehat{6_2, 6_2}$, 3_2; $\widehat{4_1, 4_1}$, $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 2). (3 = 5). (7 = 11). **(9 = 13)**	I, f	$\times$	$\widehat{8_2, 8_2}$; $\widehat{6_2, 6_2}$, 3_2
„	(1 = 2). (7 = 11). (8 = 12). **(14 = 15)**	I, h ($\alpha\gamma$)	$\underset{\times}{\square}$	$\widehat{6_2, 6_2}$, 3_1, 3_1
5	(1 = 2). (3 = 5). **(4 = 6)**. (7 = 11). **(8 = 12)**	II, d	—	$\widehat{8_2, 8_2}$, 4_3; $\widehat{6_2, 6_2}$; $\widehat{4_1, 4_1}$, $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 11). (3 = 5). **(4 = 6)**. (7 = 11). **(9 = 13)**	II, e	$\square$	$\widehat{8_3, 8_3}$; $\widehat{6_2, 6_2}$
„	(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). **(16 = 17)**	I, i ($\beta\gamma$)	—	$\widehat{8_3, 8_3}$; $\widehat{6_1, 6_1}$, 3_1; $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 2). (3 = 5). (7 = 11). **(8 = 12)**. **(9 = 13)**	II, f	—	$\widehat{8_2, 8_2}$, 4_3; 3_2; $\widehat{4_1, 4_1}$
„	(1 = 2). **(3 = 5)**. (7 = 11). (8 = 12). **(14 = 15)**	II, g ($\alpha\gamma$)	—	$\widehat{8_1, 8_1}$; $\widehat{6_2, 6_2}$, 3_1, 3_2; $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 2). (3 = 5). (7 = 11). (9 = 13). **(10 = 24)**!	I, g	—	$\widehat{8_3, 8_3}$; 3_2; $(\widehat{4_1 - 4_1})_\infty$
6	(1 = 2). (3 = 5). **(4 = 6)**. (7 = 11). **(8 = 12)**. **(9 = 13)**	III, a	—	$\widehat{8_3, 8_3}$, 4_3; $\widehat{4_1, 4_1}$
„	(1 = 2). (3 = 5). **(4 = 6)**. (7 = 11). (8 = 12). **(14 = 15)**	II, h ($\alpha\gamma$)	—	$\widehat{8_2, 8_2}$; $\widehat{6_2, 6_2}$, 3_1; $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). **(8 = 12)**. **(16 = 17)**	II, e ($\beta\gamma$)	—	$\widehat{8_3, 8_3}$, 4_3; $\widehat{6_2, 6_2}$, 3_1; $\widehat{4_1, 4_1}$, $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). (9 = 13). **(10 = 24)**!	I, g	$\parallel +$	$(\widehat{4_1 \equiv 4_1})_\infty$

Art	Name	Typus	$+\triangle\times\square$	Art der Ecken
6	(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). (9 = 13). **(16 = 17)**	I, i $(\beta\gamma)$	$\frac{\triangle}{\times}$	$\widehat{6_2, 6_2}$, 3_1
„	(1 = 2). (3 = 5). (7 = 11). (8 = 12). (9 = 13). **(10 = 24)**!	I, g	—	$\widehat{8_3, 8_3}$, 4_3; $\widehat{6_4, 6_4}$, 3_2; $(\widehat{4_1 \equiv 4_1})_\infty$
„	(1 = 2). (3 = 5). (7 = 11). (8 = 12). **(9 = 13)**. **(14 = 15)**	II, i $(\alpha\gamma)$	$\times$	$\widehat{8_2, 8_2}$; $3_1, 3_2$
7	(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). (8 = 12). (9 = 13). **(10 = 24)**!	I, g	—	4_3; $\widehat{6_4, 6_4}$; $\widehat{4_1, 4_1}$, $(\widehat{4_1 \equiv 4_1})_\infty$
„	(1 = 2). (3 = 5). **(4 = 6)**. (7 = 11). (8 = 12). **(9 = 13)**. **(14 = 15)**	III, b $(\alpha\gamma)$	$\triangle$	$\widehat{8_3, 8_3}$; 3_1
„	(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). **(8 = 12)**. (9 = 13). **(16 = 17)**	II, l $(\beta\gamma)$	—	4_3; 3_1; $\widehat{4_1, 4_1}$
„	(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). (8 = 12). **(14 = 15)**. **(16 = 17)**	II, n (γ)	—	$\widehat{8_3, 8_3}$; $\widehat{6_2, 6_2}$, $(3_1 \overset{+}{=} 3_1)_\infty$; $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). (9 = 13). **(10 = 24)**. **(16 = 17)**!	II, m $(\beta\gamma)$	—	$\widehat{8_5, 8_5}$; 3_1; $(\widehat{4_1 \equiv 4_1})_\infty$
„	(1 = 2). (3 = 5). (7 = 11). (8 = 12). (9 = 13). **(10 = 24)**. **(14 = 15)**!	II, k $(\alpha\gamma)$	—	$\widehat{8_3, 8_3}$; $\widehat{6_4, 6_4}$, 3_1; $(\widehat{4_1 \equiv 4_1})_\infty$
8	(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). (8 = 12). (9 = 13). **(10 = 24)**. **(14 = 15)**!	II, k $(\alpha\gamma)$	—	$\widehat{6_4, 6_4}$, 3_1; $(\widehat{4_1 \equiv 4_1})_\infty$
„	(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). (8 = 12). (9 = 13). **(10 = 24)**. **(16 = 17)**!	II, m $(\beta\gamma)$	—	$\widehat{8_5, 8_5}$, 4_3; $\widehat{6_4, 6_4}$, 3_1; $\widehat{4_1, 4_1}$, $(\widehat{4_1 \equiv 4_1})_\infty$
„	(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). (8 = 12). (9 = 13). **(14 = 15)**. **(16 = 17)**	II, n (γ)	$\parallel\times$	$(3_1 \overset{+}{=} 3_1)_\infty$
9	(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). (8 = 12). (9 = 13). **(10 = 24)**. **(14 = 15)**. **(16 = 17)**!	III, c (γ)	$\frac{\square}{\square}$	$(3_1 \overset{+}{=} 3_1)_\infty$; $(\widehat{4_1 \equiv 4_1})_\infty$

Es existieren demnach: für $m > 2$: 18 ganzgeschl. u. 6 halbgeschl. konvexe Polyeder,
„ $m < 2$: 18 „ „ 6 „ „ „ „,
„ $m = 2$: 13 „ „ 21 „ „ „ „.

Konvexe Begrenzungsfläche besitzen von ihnen:

für $m > 2$: 3 ($\triangle$) + 3 ($\square$),
„ $m < 2$: 3 ($\triangle$) + 3 ($\square$),
„ $m = 2$: 4 ($\triangle$) + 4 ($\square$) + 2 ($\parallel$) + 1 ($\frac{\square}{\square}$).

Die Dreiecke sind alle gleichschenklig, die konvexen Vierecke sind Deltoide bezw. Trapeze.

„$\frac{\square}{\square}$“ bedeutet ein Rechteck, dessen Kanten das Unendlichweite enthalten. —

Die konzentrischen Anordnungen ergeben sich aus den Betrachtungen des § 5:

Fall 1. und 2. sind unmöglich; ersterer, da die Punkte T der gleichen Hauptsymmetrieebene nicht symmetrisch zu $A-bc$ liegen; letzterer, da aufser $b\bar{c}$ ein einzelner Punkt T in der Begrenzungsfläche nicht vorkommen darf. Eine Gestalt von 2. geht über in eine konzentrische Anordnung von drei achtflächigen kreuzartigen unendlichen Teilpolyedern (die Begrenzungsfläche hängt nur in einem Punkte zusammen):

$(7 = 11).\ (9 = 13).\ \mathbf{(10 = 24)}$ Typus: I, g Ecken: $\widehat{4_1 \overset{+}{=} 4_1}$, $\widehat{8_2, 8_2}$; $(\widehat{4_1 \equiv 4_1})_\infty$;
$A = 3,\ A' = 1,\ (\bar{A} = 27,\ \bar{A}' = 9)$ nichtkonvex.

3. Die Begrenzungsfläche ist ein Dreieck mit den drei Punkten R_a als Ecken. Der Körper zerfällt in drei kongruente achtflächige senktrechte Bipyramiden des quadratischen Systems (Oktaide). Die einzige mögliche Form ist:

$(1 = 2).\ (3 = 5).\ \mathbf{(4 = 6)}$ Typus: I, c Ecke: $\widehat{8_2, 8_2}$, 4_1; $A = 3,\ A' = 1$ konvex.

Fall 4. unmöglich, da wegen der Symmetrie nach $A-bc$ A der einzige Punkt R ist, der hier als projizierender Punkt in Betracht kommt, gleichzeitig aber bc als Eckpunkt verschwindet.

5. Die Ecken des Begrenzungspolygons sind nur Punkte S mit oder ohne Punkte R_a; die Hauptsymmetrielinien dürfen als Kanten nicht vorkommen. Der Körper zerfällt in zwei (ein rechtes und ein linkes) Triakistetraeder beliebiger Art (vgl. § 8). Die Anzahl der hierhergehörigen konzentrischen Anordnungen beträgt:

für $m \gtrless 2$: $2^{(8-5)} - 1 = 7$
„ $m = 2$: $2^{(9-5)} - 1 = 15$, darunter auch die unter 6. genannte Gestalt.

6. und 7. Die Begrenzungsfläche ist ein von Parallelen begrenzter Streifen:

6. einziger Eckpunkt ist $S_{4\infty}$ (γ!); konzentrische Anordnung von acht untereinander kongruenten, dreiflächigen unendlichen regulären Prismen, die zu je zweien einer dreizähligen Achse parallel laufen. Es existiert nur eine Gestalt, nämlich:

(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). (8 = 12). (9 = 13). (**14 = 15**). (**16 = 17**) (γ)
Typus: II, n Ecke: $(3_1 \overset{+}{=} 3_1)_\infty$ $A = 8$, $A' = 1$ konvex.

7. einziger Eckpunkt ist $b\bar{c}_\infty$; konzentrische Anordnung von sechs untereinander kongruenten, vierflächigen unendlichen Prismen, die je einer zweizähligen Achse parallel laufen.[1]) Es ist nur eine Gestalt möglich, nämlich:

(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). (9 = 13). (**10 = 24**) Typus: I, g
Ecke: $\widehat{(4_1 = 4_1)_\infty}$; $A = 6$, $A' = 1$ konvex.

Aus § 6 ergeben sich folgende hierhergehörige halbreguläre Körper:

$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_2 = \psi_3$:

a) Polyeder (**1 = 2**) (Grundform a) Typus: I, a (□) Ecken: 4_1; 3_1; $\widehat{4_1, 4_1}$

b) Polyeder (1 = 2). (**3 = 5**) „ I, b „ $\widehat{8_1, 8_1}$, 4_1; 3_2

a) und b) für $n = m = \sqrt{2} + 1$.

$\varphi_3 = \psi_5 = \psi_6$:

c) Polyeder (1 = 2). (3 = 5). (**4 = 6**). (7 = 11). (8 = 12). (**9 = 13**). (**14 = 15**)
Typus: III, b (△) Ecken: $\widehat{8_3, 8_3}$; 3_1 für $n = m = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

$\psi_2 = \psi_3 = \psi_4$:

d) Polyeder (1 = 2). (**7 = 11**) Typus: I, d (△) Ecken: $\widehat{6_1\ 6_1}$, 3_1 für $n = m = 3$ konzentrische Anordnung von zwei halbregulären Triakistetraedern.

$\psi_5 = \psi_6$:

e) Die konzentrische Anordnung von acht kongruenten dreiflächigen unendlichen regulären Prismen:

(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). (8 = 12). (9 = 13). (**14 = 15**). (**16 = 17**)
Typus: II, n (||) Ecken: $(3_1 \overset{+}{=} 3_1)_\infty$ immer für γ, d. h. für $n = m = 2$.

$\varphi_3 = \psi_4$:

f) Die konzentrische Anordnung von sechs kongruenten vierflächigen unendlichen (jetzt regulären) Prismen:

(1 = 2). (3 = 5). (4 = 6). (7 = 11). (9 = 13). (**10 = 24**) Typus: I, g (||) Ecken: $\widehat{(4_1 = 4_1)_\infty}$
für $n = m = \sqrt{2}$. —

[1]) Die von unendlichen Parallelstreifen begrenzte konzentrische Anordnung, deren Eckpunkt (allgemein) $p\,\bar{q}_\infty$ ist, kann zu der Kategorie gerechnet werden, in der die Begrenzungsfläche dadurch entsteht, dafs von einem Punkte R aus Punkte der gegenüberliegenden Hauptsymmetriekante projiziert werden.

3. Das Triakisoktaeder $(n:1:1)$.

Da $m = 1$ ist, steht die Polyederfläche senkrecht zu der Zwischensymmetrieebene, deren Spur $C-ab$ ist (Fig. 6). Die Schnittfigur ist symmetrisch zu $C-ab$; AB und $C-a\bar{b}$ stehen auf $C-ab$ senkrecht; ab ist die Mitte von AB.

Durch Einsetzen des speziellen Wertes erhält man:

$$OS_1 = \frac{n}{2n+1}\, a\sqrt{3}$$

$$OS_2 = \frac{n}{2n-1}\, a\sqrt{3}$$

$$OS_3 \equiv OS_4 = n a\sqrt{3}.$$

Da (für $m = 1$) $nm < n + m$ ist, so gehört das Triakisoktaeder stets zur Untergattung β des Hexakisoktaeders.

$$O-ab = \frac{1}{2}\, a\sqrt{2}$$

$$O-ac \equiv O-bc = \frac{n}{n+1}\, a\sqrt{2}$$

$$O-a\bar{b} = \infty$$

$$O-a\bar{c} \equiv O-b\bar{c} = \frac{n}{n-1}\, a\sqrt{2}.$$

(NB. ab ist nicht Eckpunkt!)

Demnach ist

$$O-ab < \left\{\begin{matrix} O-ac \\ \equiv \\ O-bc \end{matrix}\right\} < \left\{\begin{matrix} O-a\bar{c} \\ \equiv \\ O-b\bar{c} \end{matrix}\right\} < O-a\bar{b}.$$

Die Schnittfigur enthält 16 geschlossene Zellen (davon zwei halbgeschlossen) und 16 offene Zellen (also acht transgredient). Je zwei zu der Geraden $C-ab$ symmetrisch gelegene Zellen sind spiegelbildlich gleich und zusammengehörig, so dafs sich die Anzahl der verschiedenen Zellformen auf die Hälfte reduziert. Demnach existieren folgende geschlossene vollsymmetrische Grundformen:

a) $1 + 3$; b) 2 ± 4; c) 5 ± 6; d) 7 ± 9; e) 8 ± 10; f) 11 ± 16; g) 13 ± 17; h) 12 ± 29.

h) ist halbgeschlossen. — Die Begrenzungsflächen von a) und d) sind gleichschenklige Dreiecke, die von c) ein Deltoid.

Die Anzahl der hierhergehörigen geschlossenen Polyeder beträgt:

für $A =$ 1 2 3 4 5 6 7 8

$7(+1) + 21(+7) + 35(+21) + 35(+35) + 21(+35) + 7(+21) + 1(+7) + 0(+1)$

$= 2^7 - 1\ (+ 2^8 - 2^7) = 127\ (+128)$; zusammen $= 255$.

Anzahl der offenen Gestalten ohne geschlossenes Kernpolyeder: $2^8 - 1 = 255$
„ „ „ „ mit „ „ „ $2^{16} - 2 \cdot 2^8 + 1 = 65025$
„ „ transgredienten Polyeder ohne geschl. „ $2^4 - 1 = 15$
„ „ „ „ mit „ „ „ $2^{12} - 2^8 - 2^4 + 1 = 3825$
„ aller geschlossenen und transgredienten Polyeder zusammen: $2^{12} - 1 = 4095$.

Zusammenstellung der allophänen Typen.

I.

Die Aufsenfläche wird von einer einzigen Zellform gebildet.

Nr.	Zellform der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	(1 = 3)	—	$2^0 = 1$
b)	(2 = 4)	(1 = 3)	$2^1 = 2$
c)	(5 = 6)	(1 = 3), (2 = 4)	$2^2 = 4$
d)	(7 = 9)	(1 = 3)	$2^1 = 2$
e)	(8 = 10)	(1 = 3), (2 = 4), (7 = 9)	$2^3 = 8$
f)	(11 = 16)	(1 = 3), (2 = 4), (7 = 9)	$2^3 = 8$
g)	(13 = 17)	(1 = 3), (2 = 4), (5 = 6), (7 = 9), (11 = 16)	$2^5 = 32$
h)	(12 = 29)!	(1 = 3), (2 = 4), (7 = 9), (8 = 10), (11 = 16)	$2^5 = 32$

Gesamtzahl der Polyeder: 57 (+ 32) = 89.

II.

Die Aufsenfläche wird von zwei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	(2 = 4). (7 = 9)	(1 = 3)	$2^1 = 2$
b)	(5 = 6). (7 = 9)	(1 = 3), (2 = 4)	$2^2 = 4$
c)	(5 = 6). (8 = 10)	(1 = 3), (2 = 4), (7 = 9)	$2^3 = 8$
d)	(5 = 6). (11 = 16)	(1 = 3), (2 = 4), (7 = 9)	$2^3 = 8$
e)	(8 = 10). (11 = 16)	(1 = 3), (2 = 4), (7 = 9)	$2^3 = 8$
f)	(8 = 10). (13 = 17)	(1 = 3), (2 = 4), (5 = 6), (7 = 9), (11 = 16)	$2^5 = 32$
g)	(5 = 6). (12 = 29)!	(1 = 3), (2 = 4), (7 = 9), (8 = 10), (11 = 16)	$2^5 = 32$
h)	(13 = 17). (12 = 29)!	(1 = 3), (2 = 4), (5 = 6), (7 = 9), (8 = 10), (11 = 16)	$2^6 = 64$

Gesamtzahl der Polyeder: 62 (+ 96) = 158.

III.

Die Aufsenfläche wird von drei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	(5 = 6). (8 = 10). (11 = 16)	(1 = 3), (2 = 4), (7 = 9)	$2^3 = 8$

Sonst sind keine allophänen Typen möglich; im ganzen sind es also 14 ganzgeschlossene und drei halbgeschlossene Typen. —

Tabelle der konvexen Polyeder.

Art	Name	Typus	+△× □	Art der Ecken
1	**(1 = 3)**	I, a	△	$\overbrace{8_1, 8_1}$; 3_1
2	(1 = 3). **(2 = 4)**	I, b	—	$\overbrace{8_2, 8_2}$; 3_2; $\overbrace{4_1, 4_1}$
„	(1 = 3). **(7 = 9)**	I, d	□ ×	$\overbrace{8_2, 8_2}$; 3_1, 3_1
3	(1 = 3). (2 = 4). **(5 = 6)**	I, c	△ +	$\overbrace{8_2, 8_2}$, 4_1
„	(1 = 3). **(2 = 4)**. (7 = 9)	II, a	—	$\overbrace{8_3, 8_3}$; 3_1, 3_2; $\overbrace{4_1, 4_1}$
„	(1 = 3). (2 = 4). **(11 = 16)**	I, f	—	$\overbrace{8_3, 8_3}$; $\overbrace{6_1, 6_1}$, 3_2
„	(1 = 3). (7 = 9). **(8 = 10)**	I, e	—	$\overbrace{8_3, 8_3}$; 3_1, 3_2; $\overbrace{4_1, 4_1}$
4	(1 = 3). (2 = 4). (5 = 6). **(7 = 9)**	II, b	□	$\overbrace{8_3, 8_3}$, 4_1; 3_1
„	(1 = 3). (2 = 4). (5 = 6). **(11 = 16)**	II, d	—	$\overbrace{8_3, 8_3}$, 4_1; $\overbrace{6_1, 6_1}$; $\overbrace{4_3, 4_3}$
„	(1 = 3). (2 = 4). (7 = 9). **(8 = 10)**	I, e	—	3_2, 3_2; $\overbrace{4_1, 4_1}$, $\overbrace{4_1, 4_1}$
„	(1 = 3). (2 = 4). (7 = 9). **(11 = 16)**	I, f	×	$\overbrace{6_1, 6_1}$, 3_1, 3_2
„	(1 = 3). (2 = 4). (11 = 16). **(12 = 29)**!	I, h	—	$\overbrace{6_2, 6_2}$, 3_2; $\overbrace{(4_1 = 4_1)_\infty}$
5	(1 = 3). (2 = 4). (5 = 6). (7 = 9). **(8 = 10)**	II, c	—	4_1; 3_2; $\overbrace{4_1, 4_1}$
„	(1 = 3). (2 = 4). (5 = 6). (7 = 9). **(11 = 16)**	II, d	—	4_1; $\overbrace{6_1, 6_1}$, 3_1; $\overbrace{4_3, 4_3}$
„	(1 = 3). (2 = 4). (5 = 6). (11 = 16). **(12 = 29)**!	II, g	—	4_1; $\overbrace{6_2, 6_2}$; $\overbrace{(4_1 = 4_1)_\infty}$, $\overbrace{4_3, 4_3}$
„	(1 = 3). (2 = 4). (5 = 6). (11 = 16). **(13 = 17)**	I, g	□	$\overbrace{8_3, 8_3}$; $\overbrace{6_2, 6_2}$
„	(1 = 3). (2 = 4). (7 = 9). **(8 = 10)**. **(11 = 16)**	II, e	—	$\overbrace{8_5, 8_5}$; $\overbrace{6_1, 6_1}$, 3_2, 3_2; $\overbrace{4_1, 4_1}$
„	(1 = 3). (2 = 4). (7 = 9). (11 = 16). **(12 = 29)**!	I, h	—	$\overbrace{8_5, 8_5}$; $\overbrace{6_2, 6_2}$, 3_1, 3_2; $\overbrace{(4_1 = 4_1)_\infty}$

Art	Name	Typus	$+\triangle\times\square$	Art der Ecken
6	(1 = 3). (2 = 4). (**5 = 6**). (7 = 9). (**8 = 10**). (**11 = 16**)	III, a	—	$\widehat{8_5, 8_5}$, 4_1; $\widehat{6_1, 6_1}$, 3_2; $\widehat{4_1, 4_1}$, $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 3). (2 = 4). (**5 = 6**). (7 = 9). (11 = 16). (**12 = 29**)!	II, g	—	$\widehat{8_5, 8_5}$, 4_1; $\widehat{6_2, 6_2}$, 3_1; $(\widehat{4_1 - 4_1})_\infty$, $\widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 3). (2 = 4). (5 = 6). (7 = 9). (11 = 16). (**13 = 17**)	I, g	$\underset{\times}{\triangle}$	$\widehat{6_2, 6_2}$, 3_1
„	(1 = 3). (2 = 4). (5 = 6). (11 = 16). (**12 = 29**). (**13 = 17**)!	II, h	$\parallel +$	$(\widehat{4_1 = 4_1})_\infty$
„	(1 = 3). (2 = 4). (7 = 9). (8 = 10). (11 = 16). (**12 = 29**)!	I, h	—	$\widehat{8_6, 8_6}$; $\widehat{6_2, 6_2}$, 3_2, 3_2; $\widehat{4_1, 4_1}$, $(\widehat{4_1 = 4_1})_\infty$
7	(1 = 3). (2 = 4). (**5 = 6**). (7 = 9). (8 = 10). (11 = 16). (**12 = 29**)!	II, g	—	$\widehat{8_6, 8_6}, 4_1; \widehat{6_2, 6_2}, 3_2; (\widehat{4_1 - 4_1})_\infty, \widehat{4_1, 4_1}, \widehat{4_3, 4_3}$
„	(1 = 3). (2 = 4). (5 = 6). (7 = 9). (**8 = 10**). (11 = 16). (**13 = 17**)	II, f	—	$\widehat{8_5, 8_5}$; $\widehat{6_2, 6_2}$, 3_2; $\widehat{4_1, 4_1}$
„	(1 = 3). (2 = 4). (5 = 6). (7 = 9). (11 = 16). (**12 = 29**). (**13 = 17**)!	II, h	—	$\widehat{8_5, 8_5}$; 3_1; $(\widehat{4_1 = 4_1})_\infty$
8	(1 = 3). (2 = 4). (5 = 6). (7 = 9). (8 = 10). (11 = 16). (**12 = 29**). (**13 = 17**)!	II, h	—	$\widehat{8_6, 8_6}$; 3_2; $\widehat{4_1, 4_1}$, $(\widehat{4_1 = 4_1})_\infty$

Es existieren also 18 ganzgeschlossene und 9 halbgeschlossene konvexe vollsymmetrische Polyeder. Konvexe Begrenzungsflächen besitzen $3(\triangle) + 3(\square)$ bez. $1(\parallel)$ von ihnen. Die Dreiecke sind gleichschenklig, die Vierecke Trapeze bez. Deltoide. —

Über die konzentrischen Anordnungen ergibt sich nach § 5 folgendes:

Fall 1. und 2. unmöglich; ersterer, da die in einer Hauptsymmetriekante gelegenen Punkte T nicht symmetrisch zu $C - ab$ sind; letzterer, da aufser $a\bar{b}$ die Punkte T in der Begrenzungsfläche nur paarweise auftreten können.

Eine Form von 2. geht über in folgende konzentrische Anordnung von drei kongruenten achtflächigen, kreuzförmigen unendlichen Teilpolyedern:

(11 = 16). (**12 = 29**). (**13 = 17**) Typus: II, h Ecken: $(\widehat{4_1 \equiv 4_1})$, $\widehat{8_2, 8_2}$; $(\widehat{4_1 = 4_1})_\infty$
$A = 3$, $A' = 1$, $(\overline{A} = 27$, $\overline{A}' = 9)$ nichtkonvex.

3. Die Begrenzungsfläche ist ein Dreieck mit den drei Punkten R_a als Ecken. Der Körper zerfällt in drei kongruente achtflächige senkrechte Bipyramiden des quadratischen Systems (Oktaide).

Einzige mögliche Form:

$(1 = 3).\ (2 = 4).\ (\mathbf{5 = 6})$ Typus: I, c ($\triangle$) Ecken: $\widehat{8_2, 8_2}$, 4_1; $A = 3$, $A' = 1$ konvex.

Fall 4. ist unmöglich, da wegen der Symmetrie nach $C - ab\ C$ der einzige Punkt R ist, der als projizierender Punkt in Betracht kommt, gleichzeitig aber ab als Eckpunkt verschwindet.

5. Die Ecken des Begrenzungspolygons sind Punkte S mit oder ohne Punkte R_a. Hauptsymmetrielinien dürfen als Kanten nicht auftreten. Der Körper zerfällt in ein rechtes und ein linkes „Deltoid"-Dodekaeder erster oder höherer Art (vgl. § 8); die Anzahl der hierhergehörigen konzentrischen Anordnungen ist

$$2^{(8-5)} - 1 = 7.$$

Fall 6. unmöglich, da Untergattung γ ausgeschlossen ist.

7. Die Begrenzungsfläche ist ein unendlicher Parallelstreifen; einziger Eckpunkt: $a\bar{b}_\infty$; konzentrische Anordnung von sechs kongruenten vierflächigen, unendlichen Prismen (des rhombischen Systems), die je einer zweizähligen Achse parallel laufen. Die einzige mögliche Gestalt ist:

$(1 = 3).\ (2 = 4).\ (5 = 6).\ (11 = 16).\ (\mathbf{12 = 29}).\ (\mathbf{13 = 17})$ Typus: II, h
Ecken: $(\widehat{4_1 \equiv 4_1})_\infty$; $A = 6$, $A' = 1$ konvex.

Aus § 6 endlich ergeben sich folgende halbreguläre Körper.

$\varphi_1 = \psi_1 = \psi_2$:

a) $(\mathbf{1 = 3})$ Typus: I, a ($\triangle$) Grundform Ecken: $\widehat{8_1, 8_1}$; 3_1 für $n = \sqrt{2} + 1$.

$\varphi_2 = \varphi_3 = \psi_1 = \psi_5$:

b) $(1 = 3).\ (2 = 4).\ (\mathbf{5 = 6}).\ (\mathbf{7 = 9})$ Typus: II, b ($\square$) Ecken: $\widehat{8_3, 8_3}$, 4_1; 3_1
c) $(1 = 3).\ (2 = 4).\ (\mathbf{5 = 6}).\ (7 = 9).\ (\mathbf{8 = 10})$ Typus: II, c
Ecken: 4_1; 3_2; $\widehat{4_1, 4_1}$ } für $n = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

4. Das Rhombendodekaeder $(\infty : 1 : 1)$.

Das Rhombendodekaeder ist die Grenzform von Tetrakishexaeder und Triakisoktaeder. Die Begriffe Gattung und Familie fallen bei ihm zusammen, da sein Symbol keine Variable mehr enthält. Weil $n = \infty$

und $m = 1$ ist, steht die Polyederfläche senkrecht zur Hauptsymmetrieebene, deren Spur AB ist, und zu der Zwischensymmetrieebene, deren Spur $C-ab$ ist. Die Schnittfigur ist zu beiden Linien symmetrisch. Der Schnittpunkt ab dieser beiden Symmetrielinien ist gleichzeitig der Berührungspunkt H der einbeschriebenen Kugel. AC und BC, sowie $C-ab$ stehen senkrecht auf AB; $C-a\bar{b}$ wird die unendlich ferne Gerade (Fig. 7).

Durch Einsetzen der speziellen Werte ergibt sich:

$$OS_1 \equiv OS_2 = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$OS_3 \equiv OS_4 = \infty.$$

Das Rhombendodekaeder gehört der Untergattung γ des Hexakisoktaeders an.

$$O-ab = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

$$O-ac \equiv O-ab \equiv O-a\bar{c} \equiv O-b\bar{c} = 1\cdot a\sqrt{2}$$

$$O-a\bar{b} = \infty.$$

(NB. ab und $a\bar{b}$ sind keine Eckpunkte!)

Es ist also

$$O-ab < \begin{Bmatrix} O-ac \\ \equiv O-bc \\ \equiv O-a\bar{c} \\ \equiv O-b\bar{c} \end{Bmatrix} < O-a\bar{b}.$$

Da die unendlich ferne Gerade als direkt-symmetrische Kante ($C_\infty - a\bar{b}_\infty$) auftritt, so enthält die Schnittfigur überhaupt keine offenen Zellen, sondern nur 24 geschlossene (nämlich 8 ganzgeschlossene und 16 halbgeschlossene). Wegen der doppelten Symmetrie sind je vier Zellen (die zu AB und $C-ab$ symmetrisch liegen) zusammengehörig und kongruent bez. spiegelbildlich gleich, so dafs sich die Anzahl der verschiedenen Zellformen auf den vierten Teil reduziert; es existieren also folgende sechs vollsymmetrische Grundformen:

a) $1 + 3 + 7 + 9$; b) $2 + 4 + 8 + 10$; c) $5 + 6 + 18 + 20$; d) $11 \pm 14 + 16 + 26$;
e) $12 \pm 15 \pm 23 \pm 29$; f) $13 \pm 17 \pm 25 \pm 30$.

a) ist ein Rhombus; a) und b) sind ganz geschlossen.

Die Anzahl aller vollsymmetrischen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten beträgt:

für $A =$ 1 2 3 4 5 6

$$2(+4) + 1(+14) + 0(+20) + 0(+15) + 0(+6) + 0(+1)$$

$$= 2^2 - 1(+2^6 - 2^2) = 3(+60); \text{ zusammen } = 63.$$

Zusammenstellung der allophänen Typen.

I.

Die Aufsenfläche wird von einer einzigen Zellform gebildet.

Nr.	Zellform der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	(1 = 3 = 7 = 9)	—	$2^0 = 1$
b)	(2 = 4 = 8 = 10)	(1 = 3 = 7 = 9)	$2^1 = 2$
c)	(5 = 6 = 18 = 20)!	(1 = 3 = 7 = 9), (2 = 4 = 8 = 10)	$2^2 = 4$
d)	(11 = 14 = 16 = 26)!	(1 = 3 = 7 = 9), (2 = 4 = 8 = 10)	$2^2 = 4$
e)	(12 = 15 = 23 = 29)!	(1 = 3 = 7 = 9), (2 = 4 = 8 = 10), (11 = 14 = 16 = 26)	$2^3 = 8$
f)	(13 = 17 = 25 = 30)!	(1 = 3 = 7 = 9), (2 = 4 = 8 = 10), (5 = 6 = 18 = 20), (11 = 14 = 16 = 26)	$2^4 = 16$

Gesamtzahl der hierhergehörigen Polyeder: 3 (+ 32) = 35.

II.

Die Aufsenfläche wird von zwei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	(5 = 6 = 18 = 20). (11 = 14 = 16 = 26)!	(1 = 3 = 7 = 9), (2 = 4 = 8 = 10)	$2^2 = 4$
b)	(5 = 6 = 18 = 20). (12 = 15 = 23 = 29)!	(1 = 3 = 7 = 9), (2 = 4 = 8 = 10), (11 = 14 = 16 = 26)	$2^3 = 8$
c)	(12 = 15 = 23 = 29). (13 = 17 = 25 = 30)!	(1 = 3 = 7 = 9), (2 = 4 = 8 = 10), (5 = 6 = 18 = 20), (11 = 14 = 16 = 26)	$2^4 = 16$

Gesamtzahl der hierhergehörigen (halbgeschlossenen) Polyeder: 28.

Im ganzen existieren also zwei ganzgeschlossene und sieben halbgeschlossene vollsymmetrische allophäne Typen.

Die konvexen Polyeder.

Art	Name	Typus	$\frac{+}{\square}$	Art der Ecken
1	**(1 = 3 = 7 = 9)**	I, a	$\square$	$\overbrace{4_1, 4_1}$; $\overbrace{3_1, 3_1}$
2	(1 = 3 = 7 = 9). **(2 = 4 = 8 = 10)**	I, b	—	$\overbrace{3_2, 3_2}$; $\overbrace{4_1, 4_1, 4_1, 4_1}$
3	(1 = 3 = 7 = 9). (2 = 4 = 8 = 10). **(5 = 6 = 18 = 20)**!	I, c	$\parallel +$	$\overbrace{(4_1 \equiv 4_1)_\infty}$
„	(1 = 3 = 7 = 9). (2 = 4 = 8 = 10). **(11 = 14 = 16 = 26)**!	I, d	—	$\overbrace{4_3, 4_3}$; $\overbrace{(6_1 \equiv 6_1, 6_1 \equiv 6_1)_\infty}$, $\overbrace{3_2, 3_2}$
4	(1 = 3 = 7 = 9). (2 = 4 = 8 = 10). **(5 = 6 = 18 = 20)**. **(11 = 14 = 16 = 26)**!	II, a	—	$\overbrace{4_3, 4_3}$, $\overbrace{(4_1 \equiv 4_1)_\infty}$; $\overbrace{(6_1 \equiv 6_1, 6_1 \equiv 6_1)_\infty}$; $\overbrace{4_3, 4_3, 4_3, 4_3}$
„	(1 = 3 = 7 = 9). (2 = 4 = 8 = 10). (11 = 14 = 16 = 26). **(12 = 15 = 23 = 29)**!	I, e	—	$\overbrace{3_2, 3_2}$, $\overbrace{(6_2 \equiv 6_2, 6_2 \equiv 6_2)_\infty}$
5	(1 = 3 = 7 = 9). (2 = 4 = 8 = 10). **(5 = 6 = 18 = 20)**. (11 = 14 = 16 = 26). **(12 = 15 = 23 = 29)**!	II, b	—	$\overbrace{(4_1 \equiv 4_1)_\infty}$; $\overbrace{(6_2 \equiv 6_2, 6_2 \equiv 6_2)_\infty}$; $\overbrace{4_3, 4_3, 4_3, 4_3}$
„	(1 = 3 = 7 = 9). (2 = 4 = 8 = 10). **(5 = 6 = 18 = 20)**. (11 = 14 = 16 = 26). **(13 = 17 = 25 = 30)**!	I, f	—	$\overbrace{4_3, 4_3}$; $\overbrace{(6_2 \equiv 6_2, 6_2 \equiv 6_2)_\infty}$
6	(1 = 3 = 7 = 9). (2 = 4 = 8 = 10). (5 = 6 = 18 = 20). (11 = 14 = 16 = 26). **(12 = 15 = 23 = 29)**. **(13 = 17 = 25 = 30)**!	II, c	$\overset{\infty}{+}$	—

Die Zahl der konvexen Polyeder ist also neun; davon sind nur die ersten beiden ganz geschlossen. Konvexe Begrenzungsfläche haben 1 (+ 2) von ihnen; dabei bedeutet „∞“ die Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung, nur von der unendlich fernen Geraden „begrenzt“. —

Folgende konzentrische Anordnungen sind möglich:

(1′.) a) Die Begrenzungsfläche ist ein Parallelstreifen; einziger Eckpunkt: C_∞; konzentrische Anordnung von drei kongruenten vierflächigen unendlichen regulären Prismen, die je einer vierzähligen Achse parallel laufen. Einzige mögliche Gestalt:

(1 = 3 = 7 = 9). (2 = 4 = 8 = 10). **(5 = 6 = 18 = 20)** Typus: I, c;
Ecken: $\overbrace{(4_1 \equiv 4_1)_\infty}$; $A = 3$, $A' = 1$ konvex.

b) Die Begrenzungsfläche ist der jenen Parallelstreifen umschliefsende Ebenenteil; konzentrische Anordnung von drei kongruenten vierflächigen unendlichen regulären Prismenerweiterungen. Einzige Gestalt:

$(11 = 14 = 16 = 26)$. $(\mathbf{12 = 15 = 23 = 29})$. $(\mathbf{13 = 17 = 25 = 30})$ Typus: II, c;
$A = 3$, $A' = 1$, $(\overline{A} = 15$, $\overline{A}' = 5)$ nichtkonvex.

(7.) c) Die Begrenzungsfläche ist die Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung (unendlich ferne Kante); die Gestalt zerfällt in sechs je von zwei Parallelebenen begrenzte Raumteile (Pinakoide):

$(1 = 3 = 7 = 9)$. $(2 = 4 = 8 = 16)$. $(5 = 6 = 18 = 20)$. $(11 = 14 = 16 = 26)$.
$(\mathbf{12 = 15 = 23 = 29})$. $(\mathbf{13 = 17 = 25 = 30})$ Typus: II, c; $A = 6$, $A' = 1$ konvex.

NB! Fall 1, 2, 3 und 4 des § 5 ist unmöglich, da C im Unendlichen liegt (also AB keine Kante ist) und A und B symmetrisch sind in bezug auf $C - ab$.

Fall 5. und 6. ist unmöglich, da wegen der Symmetrie nach AB die beiden Teilpolyeder in eine einfache Form zusammenfallen würden. —

Archimedeische Körper:

$\psi_1 = \psi_2 = \psi_4 = \psi_5$:

a) Polyeder $(\mathbf{1 = 3 = 7 = 9})$ Grundform a (Typus: I, a)

b) „ $(1 = 3 = 7 = 9)$. $(2 = 4 = 8 = 10)$. $(\mathbf{11 = 14 = 16 = 26})$!
Typus: I, d

$\varphi_2 = \varphi_3$:

c) Konzentrische Anordnung von drei regulären vierflächigen unendlichen Prismen; s. oben a).

$\psi_6 = 0$:

d) Konzentrische Anordnung von sechs Parallelraumteilen; s. oben c).

} Immer.

5. Das Hexaeder $(\infty : \infty : 1)$.

Das Hexaeder ist die Grenzform zwischen Tetrakishexaeder und Ikositetraeder. Die Polyederfläche steht senkrecht auf den Hauptsymmetrie-

ebenen, deren Spuren $AB_\infty = AC_\infty$ sind (Fig. 8), und auf den Zwischensymmetrieebenen, deren Spuren $A-bc_\infty = A-b\bar{c}_\infty$ sind. A ist also gleichzeitig Berührungspunkt H der einbeschriebenen Kugel.

Es ist $$OS_1 \equiv OS_2 \equiv OS_3 \equiv OS_4 = a\sqrt{3}.$$

Das Hexaeder gehört der Untergattung α) des Hexakisoktaeders an.

$$\left[\begin{matrix} O-ab \equiv O-ac \equiv O-a\bar{b} \equiv O-a\bar{c} = a\sqrt{2} \\ O-bc \equiv O-b\bar{c} \qquad\qquad = \infty \end{matrix}\right\} \text{sind keine Eckpunkte.}\Big]$$

Kanten, welche nicht direkt-symmetrisch sind, gibt es nicht. Auch die unendlich ferne Gerade ist eine direkt-symmetrische Kante $(B_\infty C_\infty)$; es existieren also in der Schnittfigur nur geschlossene und halbgeschlossene Zellen; ihre Anzahl ist $8\,(+16) = 24$. Wegen der Symmetrie nach den angegebenen Linien gehören immer acht zusammen, so dafs also nur $1\,(+2) = 3$ verschiedene Zellformen vorhanden sind; demnach gibt es folgende Grundformen:

a) $(1 \pm 2 \pm 7 \pm 8 \pm 11 \pm 12 \pm 14 \pm 15)$ [Würfel]; b) $(3 \pm 5 \pm 9 \pm 13 \pm 18 \pm 22 \pm 28 \pm 30)$;
c) $(4 \pm 6 \pm 10 \pm 20 \pm 24 \pm 27 \pm 32 \pm 33)$.

b) und c) sind halbgeschlossen.

Die Zahl aller gleichflächiger vollsymmetrischer Polyeder beträgt:

$$\begin{aligned} \text{für } A = \quad & 1 \qquad 2 \qquad 3 \\ & 1\,(+2) + 0\,(+3) + 0\,(+1) \\ = \; & 2^1 - 1\,(+2^3 - 2^1) = 1\,(+6); \text{ zusammen} = 7. \end{aligned}$$

Es existieren nur drei verschiedene Aufsenflächen, die je von einer Zellform gebildet werden, nämlich:

Nr.	Zellform der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	$(1 = 2 = 7 = 8 = 11 = 12 = 14 = 15)$	—	$2^0 = 1$
b)	$(3 = 5 = 9 = 13 = 18 = 22 = 28 = 30)!$	$(1 = 2 = 7 = 8 = 11 = 12 = 14 = 15)$	$2^1 = 2$
c)	$(4 = 6 = 10 = 20 = 24 = 27 = 32 = 33)!$	$(1 = 2 = 7 = 8 = 11 = 12 = 14 = 15)$, $(4 = 6 = 10 = 20 = 24 = 27 = 32 = 33)$	$2^2 = 4$

Auch konvex sind nur drei Gestalten, nämlich:

Art	Name	abgekürzt	Typus	$\overset{+}{\square}$	Art der Ecken
1	$(\mathbf{1 = 2 = 7 = 8 = 11 = 12 = 14 = 15})$	**a**	a	$\square$	$\overset{\frown}{3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1}$
2	$(1=2=7=8=11=12=14=15)$. $(\mathbf{3=5=9=13=18=22=28=30})$!	a. **b**	b	$\overset{\perp\!\!\!\perp}{\top\!\!\!\top}$	$(\overset{\frown}{4_1 \equiv 4_1,\ 4_1 \equiv 4_1})_\infty$; $\overset{\frown}{3_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 3_2}$
3	$(1=2=7=8=11=12=14=15)$. $(3=4=5=9=13=18=22=28=30)$. $(\mathbf{4 = 6 = 10 = 20 = 24 = 27 = 32 = 33})$!	a. b. **c**	c	$\overset{\otimes}{+}$	—

Das dritte dieser Polyeder ist zugleich die einzige konzentrische Anordnung (drei sich senkrecht durchsetzende, von Parallelebenen begrenzte Raumteile [Pinakoide]).

Die drei konvexen Gestalten sind auſserdem regulär. —

6. Das Oktaeder (1 : 1 : 1).

Das Oktaeder ist die Grenzform des Ikositetraeders und des Triakisoktaeders. Die Polyederfläche steht auf den drei Zwischensymmetrieebenen senkrecht, deren Spuren durch S_1 gehen. Also $S_1 \equiv H$ (Fig. 9).

$OS_1 = \frac{1}{3} a\sqrt{3}$ (nicht Eckpunkt!)

$OS_2 \equiv OS_3 \equiv OS_4 = a\sqrt{3}$.

Das Oktaeder gehört der Untergattung β des Hexakisoktaeders an.

$O - ab \equiv O - ac \equiv O - bc = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$

(nicht Eckpunkte!)

$O - a\bar{b} \equiv O - a\bar{c} \equiv O - b\bar{c} = \infty$.

Die unendlich ferne Gerade ist die einzige nicht direkt-symmetrische Kante. Die Schnittfigur enthält 12 (+ 6) = 18 geschlossene und 12 offene Zellen. Da je sechs zu den angegebenen Linien durch S_1 symmetrisch gelegene Zellen zusammengehörig und kongruent bez. spiegelbildlichgleich sind, so ist die Zahl der verschiedenen Zellformen: 2 (+ 1) = 3 geschlossene und 2 offene (beide können als transgrediente aufgefaſst werden).

Die geschlossenen vollsymmetrischen Grundformen sind also:

a) $(1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6)$; b) $(7 \pm 9 \pm 11 \pm 13 \pm 16 \pm 17)$; c) $(8 \pm 10 \pm 12 \pm 24 \pm 29 \pm 31)$.

a) und b) sind ganzgeschlossen.

Die Anzahl der hierhergehörigen geschlossenen Polyeder beträgt:

$$\text{für } A = \quad 1 \qquad 2 \qquad 3$$
$$2\,(+\,1) + 1\,(+\,2) + 0\,(+\,1)$$
$$= 2^2 - 1\,(+\,2^3 - 2^2) = 3\,(+\,4), \text{ zusammen } = 7.$$

Anzahl der offenen Gestalten ohne geschlossenes Kernpolyeder: $2^2 - 1 = 3$
„ „ „ „ mit „ „ $2^5 - 2^3 - 2^2 + 1 = 21$
„ „ transgredienten Polyeder ohne geschloss. Kernpolyeder: $2^2 - 1 = 3$
„ „ „ „ mit „ „ $2^5 - 2^3 - 2^2 + 1 = 21$
„ „ „ und geschlossenen Polyeder zusammen: $2^5 - 1 = 31$.

Es existieren nur drei verschiedene Aufsenflächen (die je von einer Zellform gebildet werden), entsprechend den drei Grundformen, nämlich:

Nr.	Zellform der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	$(1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6)$	—	$2^0 = 1$
b)	$(7 = 9 = 11 = 13 = 16 = 17)$	$(1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6)$	$2^1 = 2$
c)	$(8 = 10 = 12 = 24 = 29 = 31)$!	$(1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6)$, $(7 = 9 = 11 = 13 = 16 = 17)$	$2^2 = 4$

Auch die Anzahl der konvexen Körper beträgt drei, nämlich:

Nr.	Name	abgekürzt	Typus	$\times\triangle$	Art der Ecken
1	$(\mathbf{1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6})$	**a**	a	$\triangle$	$\overbrace{4_1, 4_1, 4_1}$
2	$(1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6)$. $(\mathbf{7 = 9 = 11 = 13 = 16 = 17})$	a. **b**	b	$\underset{\times}{\triangle}$	$\overbrace{3_1, 3_1, 3_1}$
3	$(1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6)$. $(7 = 9 = 11 = 13 = 16 = 17)$. $(\mathbf{8 = 10 = 12 = 24 = 29 = 31})$!	a. b. **c**!	c	—	$\overbrace{4_3, 4_3, 4_3}$; $\overbrace{3_2, 3_2, 3_2}$; $(\overbrace{4_1 \equiv 4_1, 4_1 \equiv 4_1, 4_1 \equiv 4_1})_\infty$

a) ist das reguläre Oktaeder.

(a. b) ist die einzige konzentrische Anordnung (zwei reguläre Tetraeder), die sogenannte stella octangula Keplers (zu Fall 5 des § 5 gehörig, da die Hauptsymmetrielinien als Kanten nicht auftreten).

Diese beiden sind zugleich die einzigen regulären Formen (halbreguläre existieren nicht). —

Hiermit sind alle holoedrisch-holosymmetrischen Gestalten des kubischen Systems erledigt.

Um die Formen und Typen der einzelnen Gattungen und Familien zu unterscheiden, dürfte es zweckmäfsig sein, den in Klammern gesetzten Zeichen die Parameter beizufügen; z. B.

Typus $(\mathrm{II}, \mathrm{b})_{\infty m 1}$; Polyeder $(1, 2, 3, \mathbf{4})_{321}$; $((1 = 2).\ (3 = 5).\ (\mathbf{4} = \mathbf{6}))_{331}$ usw.

§ 8.

Die Meroedrien.

Die meroedrischen Formen sind gleichzeitig die Teilpolyeder entsprechender holoedrischer konzentrischer Anordnungen; denn es wird der $n$te Teil der die holoedrische Gestalt bildenden Flächen zu einem vollständigen Polyeder vereinigt.

A. Die geneigtflächige Hemiedrie.

Die Hauptsymmetrieebenen kommen als Symmetrieebenen in Wegfall; daher können die Hauptsymmetrielinien nicht als direkt-symmetrische Kanten auftreten und verschwinden deshalb aus unserer Schnittfigur. Es können also keine Punkte T und keine Punkte R_k vorkommen. Je zwei Zellformen, die bei der holoedrischen Form längs einer Hauptsymmetrielinie aneinander grenzten, gehören jetzt zusammen. —

Zur Bezeichnung der geneigtflächigen Hemiedrie ist es in der Kristallographie üblich, ein „$\varkappa$“[1]) dem Symbol der entsprechenden holoedrischen Gestalt vorzusetzen.

Von jedem Polyeder existiert eine Rechts- und eine Linksform, die man durch + und — unterscheiden kann; wollte man diese besonders rechnen, so müfste man alle bezüglichen Zahlen im folgenden verdoppeln.

Nun zur Betrachtung der einzelnen Gattungen!

1. Das Hexakistetraeder [$\varkappa\,(n:m:1)$].

Das Hexakistetraeder ist die geneigtflächige Hemiedrie des Hexakisoktaeders. In jedem Punkte $R_{(d)}$ treffen sich vier Flächen, in jedem Punkte S sechs. Die Anzahl der geschlossenen Ebenenteile vermindert sich durch das Fehlen der Hauptsymmetriekanten um $3 \cdot 3 = 9$, die Anzahl der offenen

[1]) als Abkürzung von $\chi\lambda\tilde{\imath}\nu o\varsigma$.

Ebenenteile um $2 \cdot 3 = 6$ (Fig. 10).[1] Die geschlossenen Grundformen sind folgende:

a) $\varkappa(1+7)$; b) $\varkappa(2+11)$; c) $\varkappa(3+9)$; d) $\varkappa(5+13)$; e) $\underbrace{\varkappa(8+14);\ \text{f)}\ \varkappa(12+15)}_{(\alpha\gamma!)}$;

g) $\underbrace{\varkappa(4+16);\ \text{h)}\ \varkappa(6+17)}_{(\beta\gamma!)}$.

Die Anzahl der möglichen geschlossenen gleichflächigen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten beträgt:

in Untergattung α und β:

$$\begin{aligned} \text{für } A = {} & 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ & 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 \\ = {} & 2^6 - 1 = 63. \end{aligned}$$

bez. in Untergattung γ:

$$\begin{aligned} \text{für } A = {} & 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\ & 4(+4) + 6(+22) + 4(+52) + 1(+69) + 0(+56) + 0(+28) + 0(+8) + 0(+1) \\ = {} & 2^4 - 1\ (+\ 2^8 - 2^4) = 15\ (+\ 240), \text{ zusammen } = 255. \end{aligned}$$

Anzahl der offenen Gestalten ohne geschlossenes Kernpolyeder: für Untergattung α und β: $2^{12} - 1 = 4095$

für Untergattung γ: $2^8 - 1 = 255$

Anzahl der offenen Gestalten mit geschlossenem Kernpolyeder: für Untergattung α und β: $2^{18} - 2^{12} - 2^6 + 1 = 257985$

für Untergattung γ: $2^{16} - 2 \cdot 2^8 + 1 = 65025$

Anzahl der transgredienten Körper ohne geschlossenes Kernpolyeder: für Untergattung α und β: $2^6 - 1 = 63$

für Untergattung γ: $2^4 - 1 = 15$

Anzahl der transgredienten Körper mit geschlossenem Kernpolyeder: für Untergattung α und β: $2^{12} - 2 \cdot 2^6 + 1 = 3969$

für Untergattung γ: $2^{12} - 2^8 - 2^4 + 1 = 3825$

Anzahl der transgredienten und offenen Polyeder zusammen: immer: $2^{12} - 1 = 4095$.

Um nun die allophänen Typen ableiten zu können, ist es nötig, vorher von dem gegenseitigen Verdecken und Schneiden der geschlossenen Grundformen eine klare Vorstellung zu erlangen. Da je zwei geschlossene

[1] Fig. 10 ist in kleinerem Maßstabe als die übrigen Figuren reproduziert worden.

Zellformen der holoedrischen Gestalt eine neue Einheit bilden, so müssen wir diese Doppelzellen betrachten, die den Grundformen entsprechend mit $a, b, \ldots h$ bezeichnet sein mögen. Die drei Zellachsen einer solchen Doppelzelle sind nun eine vierzählige Achse und zwei dreizählige Achsen, während die zweizähligen Achsen fehlen. Dies zwingt uns, die Punkte S noch weiter in zwei Gruppen zu gliedern, in Analogie mit den Ecken der beiden Tetraeder, die dem Würfel einbeschrieben sind. Denn nur solche Punkte S, die wie die Ecken eines Tetraeders liegen, werden durch Deckoperationen auf dieselbe Zellachse gelangen können. Da nun die Verbindungslinie zweier zusammengehöriger Tetraederecken Diagonale einer Würfelfläche ist, also eine vierzählige Achse trifft, so werden in unserer vollständigen Schnittfigur Punkte S der gleichen Gruppe durch einen Punkt R getrennt, Punkte S verschiedener Gruppen dagegen durch einen Punkt T.

Auf diese Weise ergibt sich also folgende Einteilung:

für Untergattung α: 1. S_1 u. S_4 | für Untergatt. β: 1. S_1 | für Untergatt. γ: 1. S_1 u. S_4
2. S_2 u. S_3 | 2. S_2, S_3 u. S'_4 | 2. S_2, S_3 u. S'_4.

Im übrigen gilt hier das beim Hexakisoktaeder (§ 3) Gesagte. Die folgende Tabelle des Verdeckens und Schneidens der Zellformen berücksichtigt (auch in der dritten und vierten Rubrik) nur die geschlossenen Zellformen.

Gegebene Zellform	Zellachsenabschnitte	Verdeckte Zellformen	Schneidende Zellformen
$a \equiv x\,(1+7)$	$A - S_1 - S_2$	—	—
$b \equiv x\,(2+11)$	$A - S_1 - S_3$ $\overset{\vee}{(S_2)}$	a	Alle Zellformen um (S_2), außer a: c, e
$c \equiv x\,(3+9)$	$B - S_1 - S_2$ $\overset{\vee}{(A)}$	a	Alle Zellformen um (A), außer a: b, e, f
$d \equiv x\,(5+13)$	$C - S_1 - S_3$ $\overset{\vee}{\binom{B}{A}}$ $\quad \overset{\vee}{(S_2)}$	a, b, c	1. Alle Zellformen um (A), außer a u. b: e, f 2. Alle Zellformen um (B), außer c: g 3. Alle Zellformen um (S_2), außer a, c u. (e): —

Gegebene Zellform	Zellachsenabschnitte	Verdeckte Zellformen	Schneidende Zellformen
$e \equiv \varkappa\,(8+14)$ $(\alpha\gamma!)$	$A - S_4 - S_2$ $\overset{\vee}{(S_1)}$	a	Alle Zellformen um (S_1), aufser a: $b,\ c,\ d,\ g,\ h$
$f \equiv \varkappa\,(12+15)$ $(\alpha\gamma!)$	$A - S_4 - S_3$ $\overset{\vee}{(S_1)}\ \overset{\vee}{(S_2)}$	$a,\ b,\ e$	1. Alle Zellformen um (S_1), aufser a u. b: $c,\ d,\ g,\ h$ 2. Alle Zellformen um (S_2), aufser $a,\ e$ (u. c): —
$g \equiv \varkappa\,(4+16)$ $(\beta\gamma!)$	$B - S_1 - S_4'$ $\overset{\vee}{(A)}\qquad \overset{\vee}{\binom{S_3}{S_2}}$	$a,\ b,\ c$	1. Alle Zellformen um (A), aufser a u. b: $e,\ f$ 2. Alle Zellformen um (S_2), aufser $a,\ c$ (u. e): — 3. Alle Zellformen um (S_3), aufser b (u. f): d
$h \equiv \varkappa\,(6+17)$ $(\beta\gamma!)$	$C - S_1 - S_4'$ $\overset{\vee}{\binom{B}{A}}\qquad \overset{\vee}{\binom{S_3}{S_2}}$	a, b, c, d, g	1. Alle Zellformen um (A), aufser a u. b: $e,\ f$ 2. Alle Zellformen um (B), aufser c u. g: — 3. Alle Zellformen um (S_2), aufser $a,\ c$ (u. e): — 4. Alle Zellformen um (S_3), aufser $b,\ d$ (u. f): —

Nunmehr ergeben sich die allophänen Typen, wie folgt:

I.

Die Aufsenfläche wird von einer einzigen Zellform gebildet:

Nr.	Zellform der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	a	—	$2^0 = 1$
b)	b	a	$2^1 = 2$
c)	c	a	$2^1 = 2$
d)	d	$a,\ b,\ c$	$2^3 = 8$
e)	$e\,(\alpha\gamma)$	a	$2^1 = 2$
f)	$f\,(\alpha\gamma)$	$a,\ b,\ e$	$2^3 = 8$
g)	$g\,(\beta\gamma)$	$a,\ b,\ c$	$2^3 = 8$
h)	$h\,(\beta\gamma)$	$a,\ b,\ c,\ d,\ g$	$2^5 = 32$

Gesamtzahl der Polyeder für Untergattung α: 23,
" " " " " β: 53,
" " " " " γ: 13 (+ 50) = 63.

II.

Die Aufsenfläche wird von zwei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	*b. c*	*a*	$2^1 = 2$
b)	*b. e* ($\alpha\gamma$)	*a*	$2^1 = 2$
c)	*c. e* ($\alpha\gamma$)	*a*	$2^1 = 2$
d)	*c. f* ($\alpha\gamma$)	*a, b, e*	$2^3 = 8$
e)	*d. e* ($\alpha\gamma$)	*a, b, c*	$2^3 = 8$
f)	*d. f* ($\alpha\gamma$)	*a, b, c, e*	$2^4 = 16$
g)	*d. g* ($\beta\gamma$)	*a, b, c*	$2^3 = 8$
h)	*e. g* (γ)	*a, b, c*	$2^3 = 8$
i)	*e. h* (γ)	*a, b, c, d, g*	$2^5 = 32$
k)	*f. g* (γ)	*a, b, c, e*	$2^4 = 16$
l)	*f. h* (γ)	*a, b, c, d, e, g*	$2^6 = 64$

Gesamtzahl der Polyeder für Untergattung α: 38,
" " " " " β: 10,
" " " " " γ: 2 (+ 164) = 166.

III.

Die Aufsenfläche wird von drei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	*b. c. e* ($\beta\gamma$)	*a*	$2^1 = 2$
b)	*d. e. g* (γ)	*a, b, c*	$2^3 = 8$
c)	*d. f. g* (γ)	*a, b, c, e*	$2^4 = 16$

Gesamtzahl der Polyeder für Untergattung α: 2,
" " " " " β: 0,
" " " " " γ: 0 (+ 26).

Es existieren also im ganzen für Untergattung α: 13 allophäne Typen,
„ „ β: 8 „ „ ,
„ „ γ: 5 (+ 17) = 22 „ „ .

Die hierhergehörigen konvexen Polyeder sind schon in der Tabelle des § 4 enthalten und durch „×“ gekennzeichnet, wobei die dort aufgeführten Gestalten Kombinationen je eines rechten und linken konvexen Hexakistetraeders (von der Art $A' = \frac{A}{2}$) sind. Nur die Zeichen, welche den Typus angeben, sind durch die in diesem § abgeleiteten Symbole zu ersetzen. Das Übrige behält seine Bedeutung, wenn man in der letzten Rubrik 4_ν statt $8_{2\nu}$ schreibt.

Die Anzahl der konvexen Hexakistetraeder beträgt demnach

für A =	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamtzahl		
									α	β	γ
	1	3	5	6	5	4	2	1	16	10	27
	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$			(21)
	1 1 1	3 2 3	4 3 5	4 2 6	3 1 5	1 1 4	- - 2	- - 1			
		(1)	(3)	(5)	(5)	(4)	(2)	(1)			

Hiervon besitzen konvexe Begrenzungsfläche:

für A =	1	2		3	4		5	6	7	8	zusammen			
											α	β	γ	
	$1\,\triangle$	$2\,\triangle+1\,\square$		$4\,\triangle$	$1\,\square+1\,\parallel$		$2\,\triangle$	$1\,\triangle$	—	$1\,\parallel$	$8\,\triangle+2\,\square$	$6\,\triangle+1\,\square$	$10\,\triangle+2\,\square+2\,\parallel$	
	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$		$\alpha\ \beta\ \gamma$			(6)	(1) (2)
	1 1 1	2 1 2	1 1 1	3 3 4	1 - 1	- - 1	2 - 2	- 1 1		- - 1				
		(1)		(2)	(1)	(1)	(2)	(1)		(1)				

Diskontinuierlich sind nur die drei Polyeder der Untergattung γ, deren Begrenzungsfläche ein Parallelstreifen ist (vgl. § 5, 6); sie zerfallen in vier sechsseitige kongruente unendliche Prismen, die je einer dreizähligen Achse parallel sind. Es sind die folgenden:

a. c. ***e. g*** Typus: II, h (γ) Ecken: $(6_1 \equiv 6_1)_\infty$; $A = 4$, $A' = 1$ konvex,
b. d. ***f. h*** „ II, 1 (γ) „ $(6_1 \equiv 6_1)_\infty$; $A = 4$, $A' = 1$, ($\bar{A} = 16$, $\bar{A}' = 4$) nichtkonvex,
a. b. c. d. e. f. g. ***h*** „ II, 1 (γ) „ $(6_2 \equiv 6_2)_\infty$; $A = 8$, $A' = 2$ konvex.

Alle anderen Polyeder sind kontinuierlich; denn sie enthalten im Begrenzungspolygon mindestens zwei[1]) Punkte S, die sich, wie erwähnt, in die Lagen der Ecken eines Tetraeders bringen.

Aus § 6 ergibt sich, dafs halbreguläre Varietäten für das allgemeine Hexakistetraeder nicht existieren.

2. Das Triakistetraeder $[\varkappa\ (m:m:1)]$.

Das Triakistetraeder ist die geneigtflächige Hemiedrie des Deltoidikositetraeders und zugleich eine Spezialisierung des Hexakistetraeders. Daher ist die Schnittfigur symmetrisch in bezug auf die Gerade $S_1 - S_4$, die selbst als Kante nicht auftritt (Fig. 11), da auf ihrer Symmetrieebene die Polyederfläche senkrecht steht. A ist also nicht mehr Eckpunkt; in $B \equiv C$ treffen sich vier Ebenen, in S_1 und S_4 drei, in $S_2 \equiv S_3$ sechs. Wie das Ikositetraeder gehört das Triakistetraeder allen drei Untergattungen an; Kriterium: $m \gtreqless 2$.

Da immer zwei zu $S_1 - S_4$ symmetrisch liegende Doppelzellen zusammengehören und spiegelbildlichgleich sind, so ist die Anzahl der verschiedenen Zellformen halb so grofs wie bei dem allgemeinen Hexakistetraeder. Die geschlossenen Grundformen sind folgende:

$$(a \pm b) \equiv \varkappa\,((1+7) \pm (2+11)),$$
$$(c \pm d) \equiv \varkappa\,((3+9) \pm (5+13)),$$
$$(e \pm f) \equiv \varkappa\,((8+14) \pm (12+15))\ (\alpha\gamma!)$$
$$(g \pm h) \equiv \varkappa\,((4+16) \pm (6+17))\ (\beta\gamma!)$$

Die Anzahl der hierhergehörigen geschlossenen Polyeder beträgt in Untergattung α und β $(m \gtrless 2)$:

$$\text{für } A = 1 \quad 2 \quad 3$$
$$3 + 3 + 1$$
$$= 2^3 - 1 = 7;$$

bez. in Untergattung γ $(m = 2)$:

$$\text{für } A = \quad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4$$
$$2\,(+2) + 1\,(+5) + 0\,(+4) + 0\,(+1)$$
$$= 2^2 - 1\ (+ 2^4 - 2^2) = 3\ (+12), \text{ zusammen} = 15.$$

[1]) Vgl. Anmerkung [2]) auf S. 122.

Anzahl der offenen Gestalten ohne geschloss. Kernpolyeder:			für $m \gtreqless 2$:	$2^6 - 1 = 63$
			„ $m = 2$:	$2^4 - 1 = 15$
„ „ „ „	mit	„ „	„ $m \gtreqless 2$:	$2^9 - 2^6 - 2^3 + 1 = 441$
			„ $m = 2$:	$2^8 - 2 \cdot 2^4 + 1 = 225$
„ „ transgredienten Körper ohne geschloss. Kernpol.:			„ $m \gtreqless 2$:	$2^3 - 1 = 7$
			„ $m = 2$:	$2^2 - 1 = 3$
„ „ „ „	mit	„ „	„ $m \gtreqless 2$:	$2^6 - 2 \cdot 2^3 + 1 = 49$
			„ $m = 2$:	$2^6 - 2^4 - 2^2 + 1 = 45$
„ „ „	u. geschl. Polyeder zusammmen:		immer:	$2^6 - 1 = 63$.

Die allophänen Typen ergeben sich unmittelbar durch Spezialisierung der Resultate des Hexakistetraeders.

I.

Die Aufsenfläche wird von einer einzigen Zellform gebildet.

Nr.	Zellform der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	$(a = b)$	—	$2^0 = 1$
b)	$(c = d)$	$(a = b)$	$2^1 = 2$
c)	$(e = f)\ (\alpha\gamma)$	$(a = b)$	$2^1 = 2$
d)	$(g = h)\ (\beta\gamma)$	$(a = b),\ (c = d)$	$2^2 = 4$

II.

Die Aufsenfläche wird von zwei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	$(c = d).\ (e = f)\ (\alpha\gamma)$	$(a = b)$	$2^1 = 2$
b)	$(e = f).\ (g = h)\ (\gamma)$	$(a = b),\ (c = d)$	$2^2 = 4$

Im ganzen existieren also

für $m > 2$:	4	allophäne Typen,
„ $m < 2$:	3	„ „ ,
„ $m = 2$:	$2\,(+\,4) = 6$	„ „ .

Die hierhergehörigen konvexen Polyeder finden sich schon in der betreffenden Tabelle des Ikositetraeders (§ 7, 2) durch „×“ gekennzeichnet. Nur die dortigen Symbole für die Typen sind durch die eben angeführten zu ersetzen; aufserdem schreibe man 4_ν statt $8_{2\nu}$.

Die Anzahl der konvexen Triakistetraeder beträgt demnach:

für $A =$	1	2	3	4	Gesamtzahl α	β	γ
	1 $\alpha\ \beta\ \gamma$ 1 1 1	2 $\alpha\ \beta\ \gamma$ 2 1 2 (1)	2 $\alpha\ \beta\ \gamma$ 1 1 2 (2)	1 $\alpha\ \beta\ \gamma$ - - 1 (1)	4	3	6 (4)

Davon besitzen konvexe Begrenzungsfläche:

für $A =$	1	2	3	4	zusammen α	β	γ
	1 △ $\alpha\ \beta\ \gamma$ 1 1 1	1 □ $\alpha\ \beta\ \gamma$ 1 - 1 (1)	1 △ + 1 ∥ $\alpha\ \beta\ \gamma$ $\alpha\ \beta\ \gamma$ - 1 1 - - 1 (1) (1)	1 ∥ $\alpha\ \beta\ \gamma$ - - 1 (1)	1 △ + 1 □	2 △	2 △ + 1 □ + 2 ∥ (1) (1) (2)

Konzentrische Anordnung ist nur die eine von Parallelstreifen begrenzte (konvexe) Gestalt, die in vier dreiflächige reguläre unendliche Prismen zerfällt (nur für $m = 2$ möglich!):

$(a = b).\ (c = d).\ (\boldsymbol{e = f}).\ (\boldsymbol{g = h})$ Typus: II, b (γ) Ecken: $(\widehat{3_1 \equiv 3_1})_\infty$; $A = 4$, $A' = 1$.

NB. Die einzigen Gestalten des allgemeinen Hexakistetraeders, die zerfallen, sind die (drei) von Parallelstreifen begrenzten Körper; von diesen ist für das Triakistetraeder, wegen des Verschwindens von $S_1 - S_4$ als Kante, nur die eben erwähnte Form möglich, deren Begrenzungsfläche zu $S_1 - S_4$ symmetrisch ist. Daraus ergibt sich, dafs für das Triakistetraeder Körper mit geringerer Symmetrie ausgeschlossen sind!

Aus § 6 erhält man folgende Archimedeische Varietäten:

$\psi_2 = \psi_3 = \psi_4$:

$(\boldsymbol{a = b})$ Typus: I, a (△), Grundform Ecken: $\widehat{6_1, 6_1}$, 3_1 für $n = m = 3$.

$\psi_5 = \psi_6$:

Die genannte konzentrische Anordnung von vier unendlichen regulären dreiseitigen Prismen; immer, wenn die Gestalt existiert, d. h. für $n = m = 2$.

3. Das Deltoiddodekaeder [$\varkappa\ (n : 1 : 1)$].

Das Deltoiddodekaeder ist die geneigtflächige Hemiedrie des Triakisoktaeders (und somit eine Spezialisierung des Hexakistetraeders). Die Schnittfigur ist daher symmetrisch zu $S_1 - S_2$ (Fig. 12); C ist nicht mehr Eckpunkt;

in $A \equiv B$ schneiden sich vier Flächen, in S_1 und S_2 je drei, in $S_3 \equiv S_4$ sechs. Wie das Triakisoktaeder gehört das Deltoiddodekaeder ganz der Untergattung β an.

Unter Berücksichtigung der Zusammengehörigkeit der Zellen, ergeben sich die folgenden drei (ganz-)geschlossenen Grundformen:

$$(a \pm c) \equiv ((1 + 7) \pm (3 + 9)),$$
$$(b \pm g) \equiv ((2 + 11) + (4 + 16)),$$
$$(d \pm h) \equiv ((5 + 13) \pm (6 + 17)).$$

Die Anzahl der hierhergehörigen geschlossenen Polyeder beträgt:

$$\text{für } A = 1 \quad 2 \quad 3$$
$$3 + 3 + 1$$
$$= 2^3 - 1 = 7.$$

Anzahl der offenen Gestalten		ohne geschloss. Kernpolyeder:	$2^6 - 1 = 63$
„ „ „ „		mit „ „	$2^9 - 2^6 - 2^3 + 1 = 441$
„ „ transgredienten Körper		ohne „ „	$2^3 - 1 = 7$
„ „ „ „		mit „ „	$2^6 - 2 \cdot 2^3 + 1 = 49$
„ „ „	und geschlossenen Polyeder zusammen:		$2^6 - 1 = 63.$

Die allophänen Typen.

Die Aufsenfläche wird immer von einer einzigen Zellform gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper
a)	$(a = c)$	—	$2^0 = 1$
b)	$(b = g)$	$(a = c)$	$2^1 = 2$
c)	$(d = h)$	$(a = c)$, $(b = g)$	$2^2 = 4$

Konvex sind nur die drei auf S. 152 u. 153 mit „×“ bezeichneten (Teil)polyeder, nämlich:

Art	Name	Typus	△ □	Art der Ecken
1	$(\boldsymbol{a = c})$	a	□	$\widehat{4_1, 4_1}$; 3_1, 3_1
2	$(a = c).\ (\boldsymbol{b = g})$	b	—	$\widehat{6_1, 6_1}$; 3_1, 3_2
3	$(a = c).\ (b = g).\ (\boldsymbol{d = h})$	c	△	$\widehat{6_2, 6_2}$, 3_1

Konzentrische Anordnungen und halbreguläre Körper existieren nicht.

NB. Da die von Parallelstreifen begrenzten Gestalten des allgemeinen Hexakistetraeders für das Deltoiddodekaeder (β) nicht spezialisiert werden können, so sind, wie beim Triakistetraeder, Körper von geringerer Symmetrie ausgeschlossen; dasselbe gilt vom Tetraeder.

4. Das Tetraeder [$\varkappa\,(1:1:1)$].

Das (reguläre) Tetraeder ist die geneigtflächige Hemiedrie des (regulären) Oktaeders (und demnach eine Spezialisierung des Hexakistetraeders). Da die Schnittfigur nur aus drei Linien besteht (Fig. 13), so ist nur die einzige geschlossene Form $S_2 \equiv S_3 \equiv S_4$, d. h. $(a \pm b \pm c \pm d \pm g \pm h)$ möglich, eben das gewöhnliche reguläre Tetraeder. (NB. Die Rechts- und Linksgestalt ist identisch!). Aufserdem existieren zwei offene Grundformen (die auch als transgredient aufgefafst werden können).

Also

Anzahl d. offenen (bez. transgredienten) Gestalten ohne geschl. Kernpolyeder: $2^2 - 1 = 3$
„ „ „ „ „ „ mit „ „ $2^3 - 2^2 - 2^1 + 1 = 3$
„ „ transgredienten und geschlossenen Polyeder zusammen: $2^3 - 1 = 7$. —

NB. Tetrakishexaeder, Rhombendodekaeder und Hexaeder besitzen keine geneigtflächige Hemiedrie, da ihre Begrenzungsflächen symmetrisch zu einer Hauptsymmetriekante sind.

B. Die parallelflächige Hemiedrie.

Bei der parallelflächigen Hemiedrie sind die Zwischensymmetrieebenen der holoedrischen Form keine Symmetrieebenen mehr. Die Zwischensymmetrielinien der holoedrischen Form sind deshalb aus der Schnittfigur zu entfernen. Es bleiben also von den direkt-symmetrischen Kanten nur noch die drei Hauptsymmetriekanten übrig. Diese bilden allgemein als einzigen geschlossenen Ebenenteil das $\triangle ABC$, also die Fläche der konzentrischen Anordnung 3 (in § 5). Dazu kommen (allgemein) noch sechs offene (also drei transgrediente) Ebenenteile, wodurch gewisse offene bez.

transgrediente Gestalten bestimmt werden. Zur Bildung der Begrenzungspolygone aller übrigen parallelflächig-hemiedrischen Körper müssen auch Kanten verwendet werden, die nicht direkt-symmetrisch sind; diese Polyeder gehören daher nicht in den Rahmen unserer Betrachtungen.

In der Kristallographie werden die Formen der parallelflächigen Hemiedrie durch Vorsetzen von „π“[1]) vor die Symbole der entsprechenden holoedrischen Gestalten gekennzeichnet.

Ein paar Worte noch über die einzelnen Gattungen!

1. Das Diakisdodekaeder $[\pi\,(n:m:1)]$.

Das Diakisdodekaeder ist die parallelflächige Hemiedrie des Hexakisoktaeders. Die einzige (ganz)-geschlossene Gestalt ist eine konzentrische Anordnung von drei kongruenten senkrechten achtflächigen Bipyramiden (des rhombischen Systems):

$\triangle\, ABC$: $(1+2+3+4+5+6)$; Ecken: 4_1, 4_1, 4_1 konvex
(niemals halbregulär).

Anzahl	der	offenen	Gestalten	ohne	geschlossenes	Kernpolyeder:	$2^6-1=63$
„	„	„	„	mit	„	„ :	$2^7-2^6-2^1+1=63$
„	„	transgredienten	„	ohne	„	„ :	$2^3-1=7$
„	„	„	„	mit	„	„ :	$2^4-2^3-2^1+1=7$.

2. Das Pentagondodekaeder $[\pi\,(\infty:m:1)]$.

Das Pentagondodekaeder ist die parallelflächige Hemiedrie des Tetrakishexaeders, also gleichzeitig eine Spezialisierung des Diakisdodekaeders. Da Punkt C ins Unendliche rückt und AB nicht mehr Kante ist, so geht die Dreiecksfläche in einen Parallelstreifen über; dazu kommen noch zwei offene Ebenenteile (bez. ein transgredienter), welche den Parallelstreifen umschliefsen. Die einzige (halb-)geschlossene Gestalt ist eine konzentrische Anordnung von drei kongruenten senkrechten vierflächigen unendlichen Prismen (des rhombischen Systems), die je einer vierzähligen Achse parallel laufen:

$((1+2+3+4+5+6)=(7+8+9+10+18+20))$; $(\|)$; Ecken: $(\overset{\frown}{4_1=4_1})_\infty$ konvex
(für $m=1$ geht die Form in eine halbreguläre Gestalt des Rhombendodekaeders über).

[1]) als Abkürzung von $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda o\varsigma$.

Anzahl der offenen Gestalten ohne geschlossenes Kernpolyeder: $2^2 - 1 = 3$
„ „ „ „ mit „ „ : $2^3 - 2^2 - 2^1 + 1 = 3$
„ „ transgredienten „ ohne „ „ : $2^1 - 1 = 1$
„ „ „ „ mit „ „ : $2^2 - 2 \cdot 2^1 + 1 = 1$. —

Vom Ikositetraeder, Triakisoktaeder, Rhombendodekaeder und Oktaeder existieren bekanntlich keine parallelflächigen Hemiedrien, da ihre Begrenzungsflächen symmetrisch zu einer Zwischensymmetriekante sind; vom Hexaeder gibt es keine, da die Hauptsymmetrielinien bei ihm nicht Kanten sind.

C. Die plagiedrische Hemiedrie.

Bei der plagiedrischen Hemiedrie sind Symmetrieebenen nicht mehr vorhanden; also können auch keine gleichflächigen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten existieren. —

Ferner ist zu beachten:

Wie wir in den vorhergehenden §§ gesehen haben, gibt es zwar aufser den in diesem § genannten noch andere Teilpolyeder, welche einer holoedrischen konzentrischen Anordnung von 2μ Gliedern angehören; aber obgleich diese holoedrischen konzentrischen Anordnungen nur direkt-symmetrische Kanten besitzen, so ist dies doch nicht der Fall für die hemiedrischen Teilpolyeder; denn es verschwinden bei ihnen Symmetrieebenen, in denen Begrenzungskanten liegen. Diese Begrenzungslinien sind dann keine direkt-symmetrischen Kanten mehr; also gehören diese Gestalten nicht zu den von uns zu betrachtenden Polyedern.

Nur ein hemiedrischer Körper mit direkt-symmetrischen Kanten existiert noch; er ist das Teilpolyeder des holoedrisch-merosymmetrischen Oktaeders Nr. 2 (S. 188), nämlich ein vierflächiges unendliches Prisma des rhombischen Systems.

D. Die Tetartoedrie.

Auch bei der Tetartoedrie kommen (im allgemeinen) alle Symmetrieebenen in Wegfall, weshalb es (im allgemeinen) unmöglich ist, dafs gleichflächige Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten existieren. Jedoch macht

ein besonderer Fall, der sich allerdings auch bezüglich der Auswahl der Flächen von der bekannten Tetartoedrie wesentlich unterscheidet, eine Ausnahme: Wie wir im § 5, 6 und im § 7, 2 gesehen haben, gibt es für Untergattung γ gewisse konzentrische Anordnungen von acht unendlichen Prismen, die zu je zweien einer dreizähligen Achse parallel laufen. Nimmt man die beiden einer dreizähligen Achse parallelen Prismen zusammen, so erhält man eine tetartoedrische Gestalt (koaxiale Anordnung!), deren Kanten sämtlich direkt-symmetrisch sind. So entstehen aus dem Hexakisoktaeder:

$$\left.\begin{array}{l} 1+3+4+7+8+9+14+16 \quad \text{Ecken: } (6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty;\ A=2,\ A'=1 \quad \text{konvex} \\ 2+5+6+11+12+13+15+17 \quad \text{Ecken: } (6_1 \overset{+}{=} 6_1)_\infty;\ A=2,\ A'=1, \\ \qquad\qquad (\overline{A}=8,\ \overline{A}'=4) \quad \text{nichtkonvex} \\ 1+2+3+4+5+6+7+8+9+11+12+13+14+15+16+17 \\ \qquad\qquad \text{Ecken: } (6_2 \overset{+}{=} 6_2)_\infty;\ A=4,\ A'=2 \quad \text{konvex} \end{array}\right\} \gamma!$$

Diese drei Gestalten sind koaxiale Anordnungen von zwei kongruenten sechsflächigen unendlichen Prismen.

Aus dem Ikositetraeder ergibt sich nur eine solche Gestalt, eine koaxiale Anordnung von zwei kongruenten dreiflächigen regulären unendlichen Prismen, nämlich:

$$(1=2)+(3=5)+(4=6)+(7=11)+(8=12)+(9=13)+(14=15)+(16=17);$$
$$\text{Ecke: } (3_1 \overset{+}{=} 3_1)_\infty;\ A=2,\ A'=1 \text{ konvex} \quad \text{für } n=m=2. \ —$$

NB.! Da auch das Rhombendodekaeder zur Untergattung γ gehört, so entsteht auch hier eine entsprechende [gewissermafsen hemiedrische] Gestalt, der jedoch keine holoedrische Form entspricht. Es ist ein reguläres unendliches sechsflächiges Prisma erster Art, nämlich: $(1+3+7+9+4+8+14+16)$; diesem kongruent ist: $(1+3+7+9+2+11+10+26)$.[1] —

[1]) Analogerweise gibt es vom Rhombendodekaeder (und anderen) gewisse Gestalten, die nur von einem Teil der Gesamtzahl der Flächen gebildet werden und deren Begrenzungspolygon nur ein Stück des Begrenzungspolygons der Ausgangsform ist. Doch sind derartige Formen nicht als Meroedrien der Ausgangsform anzusehen; denn in dem Begriff der Meroedrie liegt schon, dafs ein zugehöriges holoedrisches Polyeder existiert, von dem ein Teil der Anzahl der nicht veränderten Begrenzungspolygone die meroedrische Form bildet. Die, wie vorhin angedeutet, entstehenden Gestalten werden übrigens auf reguläre Weise direkt erhalten bei der Behandlung der Klassen, zu denen sie gehören; (da ja jedes höhere gleichflächige Polyeder ein gewisses konvexes gleichflächiges Polyeder erster Art als inneren Kern enthält).

Aus jenen tetartoedrischen Gestalten ergeben sich als Halbflächner Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten, welche sich als

E. Ogdoedrie

des Hexakisoktaeders bez. Ikositetraeders repräsentieren. Die Begrenzungsflächen sind natürlich dieselben wie bei den tetartoedrischen Gestalten. Wir erhalten aus dem Hexakisoktaeder drei sechsflächige unendliche Prismen: ein konvexes und ein nichtkonvexes Prisma erster Art, sowie ein konvexes zweiter Art; aus dem Ikositetraeder ein dreiflächiges reguläres unendliches Prisma erster Art. Alle diese ogdoedrischen Formen bestehen nur in Untergattung γ!

F. Die Tritoedrie.

Die tritoedrischen Teilpolyeder aller in früheren §§ erwähnten, holoedrischen konzentrischen Anordnungen von 3ν Gliedern besitzen nur direktsymmetrische Kanten. Es sind, wie die genannten tetartoedrischen und ogdoedrischen Körper, durchweg hauptachsige Gestalten und zwar ist diese Hauptachse bei der Tritoedrie vierzählig. Da die in Betracht kommenden holoedrischen konzentrischen Anordnungen bei jeder Gattung unter 1., 1'., 2., 3., 4. und 7. ($p\bar{q}_\infty$!) genau zusammengestellt sind, so dürfte es überflüssig sein, die tritoedrischen Teilpolyeder nochmals einzeln anzuführen. Es sei nur bemerkt, dafs alle hierhergehörigen Körper (Bipyramiden, Prismen, Kreuzgestalten, Pinakoide) wegen der vierzähligen Hauptachsn dem quadratischen System angehören. Auch dann, wenn die holoedrische konzentrische Anordnung aus sechs Teilpolyedern besteht, so dafs die Tritoedrie eine koaxiale Anordnung von zwei Körpern des rhombischen Systems ergibt, auch dann ist die ganze tritoedrische Gestalt dem quadratischen System zuzuweisen.

Ferner kann man, wenn n Teilpolyeder die holoedrische Form bilden, $\frac{m}{n}$-Gestalten formieren. Diese sind jedoch nichts anderes als beliebige Zusammenstellungen gleichflächiger Polyeder; gewisse Symmetrieebenen der Teilpolyeder sind für diese Zusammenstellungen nicht mehr Symmetrieebenen, so dafs die Kanten dieser Zusammenstellungen nicht mehr alle direktsymmetrisch sind. Also gehören diese beliebigen $\frac{m}{n}$-Gestalten nicht zu den von uns zu untersuchenden Polyedern. —

G. Die Hektoedrie.

Auch die hektoedrischen Teilpolyeder der holoedrischen konzentrischen Anordnungen von sechs Gliedern (vgl. die früheren §§) haben nur direkt-symmetrische Kanten und sind zugleich die Hälftformen der tritoedrischen koaxialen Anordnungen. Die hierhergehörigen Körper sind durchweg hauptachsige Gestalten; die Hauptachse ist zweizählig (wenngleich teilweise aus vierzähligen Achsen der holoedrischen Formen hervorgegangen). Daher gehören alle Gestalten dem rhombischen System an; keine von ihnen zerfällt nochmals; sie sind sämtlich einfache Bipyramiden, Prismen bez. Pinakoide. Auch hier wird es nicht nötig sein, das Frühere im einzelnen zu wiederholen. —

Andere Meroedrien als die angeführten sind unmöglich, wenigstens sofern Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten in Betracht kommen; denn es sind alle holoedrischen konzentrischen Anordnungen zur Ableitung verwendet worden. —

Auf die Möglichkeit der Tritoedrie, Hektoedrie, Ogdoedrie und der angegebenen besonderen Tetartoedrie ist, meines Wissens, von anderer Seite noch nicht ausdrücklich hingewiesen worden. Und doch dürfte gerade der Zusammenhang mit den hauptachsigen Gestalten Interesse bieten, da sich nun das quadratische und das rhombische System (sowie einige Gestalten des hexagonalen) als Meroedrie des kubischen Systems auffassen lassen.

§ 9.

Die holoedrisch-merosymmetrischen Gestalten.

Wir kommen in diesem § wieder auf die holoedrischen Polyeder zurück und bringen ihre Untersuchung durch Betrachtung der merosymmetrischen Formen zum Abschluſs, indem wir vor allem auf das zu Anfang des § 7 Gesagte Bezug nehmen. —

NB. Von jeder der Gestalten (auſser beim Oktaeder) existiert eine Rechts- und eine Linksform, die jedoch nicht besonders gezählt werden!

1. Das Tetrakishexaeder $(\infty : m : 1)$.

Hauptachsige Gestalten sind unmöglich, da die in Betracht kommenden unsymmetrischen Begrenzungspolygone dem Fall 2 des § 5, also konzentrischen Anordnungen mit ungerader Anzahl von Teilpolyedern angehören. Dagegen existieren die im folgenden abzuleitenden Polyeder von der Symmetrie der geneigtflächigen Hemiedrie. Die Fläche wird durch die Zwischensymmetriekanten in $18 - (3 + 2 \cdot 4) = 7$ geschlossene Teile (Doppelzellen) und $12 - 2 = 10$ offene (also fünf transgrediente) zerlegt; von den geschlossenen Doppelzellen sind zwei nur halbgeschlossen (Fig. 4).

Nun sind aber die zu AB symmetrisch gelegenen Doppelzellen spiegelbildlich gleich; auſserdem müssen wir Gestalten, deren Begrenzungspolygon zu AB symmetrisch ist, beiseite lassen, da dieselben als holoedrisch-holosymmetrisch schon in § 7 betrachtet wurden. Wenn wir dies beachten, so erhalten wir folgende zwei geschlossene holoedrisch-merosymmetrische Grundformen (nichtkonvex!):

	dazu die symmetrischen Gestalten:
a) (2 + 11) ganzgeschlossen,	a′) (8 + 14)
b) (5 + 13) halbgeschlossen,	b′) (18 + 30).

Die Anzahl aller möglichen hierhergehörigen geschlossenen holoedrisch-merosymmetrischen Polyeder finden wir, wenn wir alle Kombinationen der 7 genannten Doppelzellen bilden, die zu AB symmetrischen Begrenzungspolygone ausscheiden und endlich durch 2 teilen, um die Rechts- und Linksgestalten nicht besonders zu rechnen. Die Anzahl der durch die genannten Doppelzellen gebildeten, zu AB symmetrischen Begrenzungspolygone wird dadurch bestimmt, dafs man die Kombination der Ebenenteile bildet, welche der einen von AB begrenzten Halbebene angehören. Wenn man beachtet, dafs ein Polyeder mit symmetrischem Begrenzungspolygon, welches in der einen Halbebene $\left(k+\frac{i}{2}\right)$ Doppelzellen besitzt, von der $(2k+i)$ten Art ist, so gilt das für die Gesamtheit der geschlossenen Polyeder Gesagte in entsprechender Weise auch für die Körper einer gewissen Art.

Also beträgt die Anzahl der hierhergehörigen geschlossenen Polyeder:

$$\text{für } A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1\,(+1) & +\,3\,(+5) & +\,3\,(+11) & +\,1\,(+13) & +\,0\,(+8) & +\,0\,(+2) & +\,0\,(+0) \end{matrix}$$

$$= \frac{2^5-2^4}{2}\left(+\frac{2^7-2^5}{2}-\frac{2^5-2^4}{2}\right) = 8\,(+40); \quad \text{zusammen} = \frac{2^7-2^5}{2} = 48.$$

Auch für die offenen bez. transgredienten Gestalten gilt das Analoge:

Anzahl der offenen Gestalten ohne geschlossenes Kernpolyeder: $\frac{2^{10}-2^6}{2} = 480,$

Anzahl der offenen Gestalten mit geschlossenem Kernpolyeder:

$$\frac{2^{17}-2^{11}}{2} - \frac{2^{10}-2^6}{2} - \frac{2^7-2^5}{2} = 63984,$$

Anzahl der transgredienten Gestalten ohne geschlossenes Kernpolyeder: $\frac{2^5-2^3}{2} = 12,$

Anzahl der transgredienten Gestalten mit geschlossenem Kernpolyeder:

$$\frac{2^{12}-2^8}{2} - \frac{2^7-2^5}{2} - \frac{2^5-2^3}{2} = 1860.$$

Da S_1 von S_4 und S_2 von S_3 verschieden ist, so gilt bezüglich des Verdeckens und Schneidens der Doppelzellen dasselbe wie beim allgemeinen Hexakistetraeder.

Wir wählen auch zur Bezeichnung der Doppelzellen wieder die gleichen Symbole; also:

$a \equiv (1+7)$; $b \equiv (2+11)$; $c \equiv (3+9)$; $d \equiv (5+13)$; $e \equiv (8+14)$; $f \equiv (12+15)$.

Die neu hinzutretende halbgeschlossene Doppelzelle $(18+30)$ heifse i.

Es ist b symmetrisch zu e,
d „ „ i.

Nur die neue Doppelzelle i mufs noch bezüglich des Verdeckens und Schneidens untersucht werden:

Gegebene Zellform	Zellachsenabschnitte	Verdeckte Zellformen	Schneidende Zellformen
i	$C_\infty - S_4 - S_2$ $\overset{\vee}{\binom{B}{A}}$ $\overset{\vee}{(S_1)}$	a, c, e	1. Alle Zellformen um (A), aufser a und e: b, f 2. Alle Zellformen um (B), aufser c: — 3. Alle Zellformen um (S_1), aufser a, c (u. b): d.

Da sich nun je zwei zueinander symmetrische Doppelzellen nicht verdecken, so sind die isophänen Körper immer merosymmetrisch, wenn die Aufsenfläche nicht holosymmetrisch ist. Ist jedoch die Aufsenfläche holosymmetrisch und sind μ_1 der verdeckten Doppelzellen symmetrisch zu AB, $2 \cdot \mu_2$ von den verdeckten Doppelzellen zu je zweien in bezug auf AB spiegelbildlich gelegen, so ist die Anzahl der holosymmetrischen isophänen Körper, die auszuscheiden sind: $2^{\mu_1 + \mu_2}$. Aufserdem ist in diesem Falle die Zahl der übrigbleibenden Gestalten durch 2 zu dividieren, um nicht die spiegelbildlichen Formen besonders zu rechnen.

In der folgenden Tabelle sind die allophänen Typen zusammengestellt: „!“ bedeutet halbgeschlossene, „$\sim$“ holosymmetrische Aufsenfläche.

I.

Die Aufsenfläche wird von einer einzigen Zellform gebildet.

Nr.	Zellform der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Zellform der symmetrischen Aufsenfläche	Von der symmetrischen Aufsenfläche verdeckte Zellformen	Wenn die Aufsenfläche holosymmetrisch ist, ist sie identisch mit dem holosym. Typus
a)	b	a	$2^1 = 2$	e	a	—
b)	d!	a, b, c	$2^3 = 8$	i!	a, c, e	—
c)	$f \sim$	a, b, e	$\frac{2^3 - 2^{1+1}}{2} = 2$	—	—	I, f

Gesamtzahl der hierhergehörigen Polyeder: $4\,(+\,8) = 12$ und ebensoviele dazu spiegelbildliche Gestalten.

II.

Die Aufsenfläche wird von zwei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Zellform der symmetrischen Aufsenfläche	Von der symmetrischen Aufsenfläche verdeckte Zellformen	Wenn die Aufsenfläche holosymmetrisch ist, ist sie identisch mit dem holosym. Typus
a)	*b. c*	*a*	$2^1 = 2$	*e. c*	*a*	—
b)	*c. f* ∼	*a, b, e*	$\frac{2^3 - 2^{1+1}}{2} = 2$	—	—	II, c
c)	*d. e* !	*a, b, c*	$2^3 = 8$	*i. b* !	*a, c, e*	—
d)	*d. f* !	*a, b, c, e*	$2^4 = 16$	*i. f* !	*a, b, c, e*	—
e)	*d. i* ! ∼	*a, b, c, e*	$\frac{2^4 - 2^{2+1}}{2} = 4$	—	—	I, i

Gesamtzahl der hierhergehörigen Polyeder: 4 (+ 28) = 32 und ebensoviele dazu spiegelbildliche Gestalten.

III.

Die Aufsenfläche wird von drei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Die Aufsenfläche ist identisch mit dem holosymmetrischen Typus
a)	*d. i. f* ! ∼	*a, b, c, e*	$\frac{2^4 - 2^{2+1}}{2} = 4$	II, n

Es existieren also im ganzen 9 allophäne Typen; 2 (+ 3) = 5 davon sind neu, d. h. es gibt keine isophänen Körper ihres Typus, die holosymmetrisch wären. Dagegen sind 2 (+ 2) = 4 Aufsenflächen selbst holosymmetrisch, deshalb gibt es von ihrem Typus sowohl holosymmetrische wie merosymmetrische Körper.

Die konvexen Polyeder ergeben sich wie früher, nur sind die vollsymmetrischen Gestalten auszuscheiden. Ein Begrenzungspolygon kann erweitert werden durch

Ansetzen von *b* an das ursprüngliche Polygon, wenn dieses *a* enthält,
" " *c* " " " " " " *a* " ,
" " *d* " " " " " " *b* " ,
" " *e* " " " " " " *a* " ,
" " *f* " " " " " " *b* u. *e* " ,
" " *i* " " " " " " *e* " .

Zusammenstellung der konvexen merosymmetrischen Polyeder.

Art	Name	Name des symmetrischen Polyeders	Typus	△	Art der Ecken
1	—	—	—	—	—
2	*a. **b***	*a. **e***	I, a	△	6_2; 6_1, 6_1
3	*a. **b. c***	*a. **c. e***	II, a	△	4_1; 6_1, 6_2
„	*a. b. **d*** !	*a. e. **i*** !	I, b	$\triangle_\infty$	$4_{1\infty}$; 6_1, 6_2
4	*a. b. c. **d*** !	*a. c. e. **i*** !	I, b	—	4_1, $4_{1\infty}$; 6_4; 6_2, 6_2
„	*a. b. **d. e*** !	*a. **b**. e. **i*** !	II, c	—	$4_{1\infty}$, 4_3; 6_1; 6_2, 6_2
5	*a. b. c. **d. e*** !	*a. **b**. c. e. **i*** !	II, c	—	4_1, $4_{1\infty}$, 4_3; 6_1, 6_4; 6_2
„	*a. b. **d**. e. **f*** !	*a. b. e. **f**. **i*** !	II, b	$\triangle_\infty$	$4_{1\infty}$; 6_2; 6_2
6	*a. b. c. **d**. e. **f*** !	*a. b. c. e. **f**. **i*** !	II, b	—	4_1, $4_{1\infty}$; 6_2, 6_4
7	—	—	—	—	—

Es existieren also 8 konvexe merosymmetrische Polyeder; konvexe Begrenzungsfläche besitzen 4 von ihnen ($2\triangle + 2\triangle_\infty$). — „$\triangle_\infty$“ bezeichnet ein △ mit einer Ecke im Unendlichen.

Konzentrische merosymmetrische Anordnungen sind unmöglich (denn der einzige Parallelstreifen: *a. b. d. e. f. i* ist symmetrisch zu *AB*).

Eine halbreguläre merosymmetrische Varietät existiert ebenfalls nicht, wie sich aus § 6, S. 130/131 und § 7, 1, S. 142 ergibt.

2. Das Ikositetraeder $(m:m:1)$ und **3. das Triakisoktaeder** $(n:1:1)$.

Sowohl für das Ikositetraeder wie für das Triakisoktaeder sind holoedrisch-merosymmetrische Gestalten (mit direkt-symmetrischen Kanten) unmöglich.

a) Es sind merosymmetrische Polyeder von der Symmetrie der geneigtflächigen Hemiedrie ausgeschlossen. Denn die Schnittfigur ist symmetrisch zu einer Zwischensymmetrielinie (sie heifse s_0). Da nun bei jeder Gestalt von der Symmetrie der geneigtflächigen Hemiedrie, d. h. bei jedem Polyeder, das nur Zwischensymmetrielinien zu Kanten hat, alle Zwischen-

symmetrieebenen als Symmetrieebenen wirklich erhalten bleiben, so wird ein Begrenzungspolygon bei einem solchen Körper in die spiegelbildliche Lage in bezug auf irgend eine Zwischensymmetrielinie, also auch in bezug auf s_0, gebracht. Demnach wird das endgültige Begrenzungspolygon von selbst symmetrisch in bezug auf s_0; dann geht aber die betrachtete Gestalt in eine der schon behandelten geneigtflächigen Hemiedrien über (Triakistetraeder bez. Deltoiddodekaeder).

b) Es existieren auch keine hauptachsigen merosymmetrischen Polyeder. Denn: $R-RT$ und $R-(RT \mid RT)$ ist unmöglich, da die Teilbipyramiden sechzehnflächig wären; $R-RR$ ist ausgeschlossen, da $\triangle ABC$ symmetrisch zu s_0 ist. Bezüglich $R-TT$ ist zu bemerken: a) Wenn R auf s_0 liegt, so ist die Begrenzungsfläche symmetrisch zu s_0. b) Wenn R nicht auf s_0 liegt, so würde sich allerdings eine holoedrisch-merosymmetrische Gestalt ergeben; diese ist aber für uns unbrauchbar, da ihre Kanten nicht mehr alle direkt-symmetrisch sind.

Hiermit ist unsere obige Behauptung bewiesen.

4. Das Rhombendodekaeder ($\infty : 1 : 1$).

Auch hier sind holoedrisch-merosymmetrische Formen, welche Hauptsymmetrielinien zu Kanten haben, nicht möglich (Fig. 7). Denn die Kombinationen von vierflächigen unendlichen Prismen (C_∞!) sind holosymmetrisch (vgl. S. 157); im übrigen wären die hierhergehörigen Gestalten Spezialisierungen von Tritoedern oder Hektoedern des Hexakisoktaeders, müfsten also 8ν ($\nu = 1, 2$) Flächen besitzen. — Dagegen können holoedrisch-merosymmetrische Polyeder mit nur Zwischensymmetrielinien als Kanten, deren Symmetrie also der geneigtflächigen Hemiedrie entspricht, wieder abgeleitet werden.

Da die Schnittfigur in bezug auf die Zwischensymmetrielinie S_1-S_2 symmetrisch ist, so mufs, wie auf der vorigen Seite für derartige Fälle allgemein bewiesen wurde, auch das Begrenzungspolygon eines jeden von unseren Polyedern spiegelbildlich in bezug auf S_1-S_2 sein. Demnach ist hier nur eine teilweise Merosymmetrie möglich, d. h. blos die Symmetrie in bezug auf die Hauptsymmetrielinie AB kommt in Wegfall.

Durch die sechs Zwischensymmetrielinien (darunter die unendlich ferne Gerade) wird die Fläche in $2\,(+\,10)$ geschlossene Doppelzellen zerlegt. Wegen der Symmetrie der Schnittfigur in bezug auf $S_1 S_2$ gehören immer zwei zu $S_1 S_2$ spiegelbildlich gelegene Doppelzellen zusammen, so dafs sich die Anzahl der zur Verfügung stehenden Zellformen auf die Hälfte: $1\,(+\,5)$ reduziert.

Die hierhergehörigen holoedrisch-merosymmetrischen Grundformen sind:

	dazu die symmetrischen Gestalten:
a) $((2 + 11) \pm (4 + 16))$ } halbgeschlossen	a') $((8 + 14) \pm (10 + 26))$
b) $((5 + 13) \pm (6 + 17))$ }	b') $((18 + 30) \pm (20 + 25))$.

Die Anzahl der hierhergehörigen holoedrisch-merosymmetrischen Polyeder — sie sind alle halbgeschlossen — beträgt:

$$\text{für } A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & + 6 & + 8 & + 6 & + 2 & + 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{2^6 - 2^4}{2} = 24.$$

Wegen der Symmetrie nach $S_1 - S_2$, wobei sich immer Punkte S derselben Gruppe spiegelbildlich entsprechen, braucht man nur die Doppelzellen der einen von $S_1 S_2$ begrenzten Halbebene bezüglich Verdeckens und Schneidens zu untersuchen; da aber die Halbebene, in der a liegt, nur Doppelzellen enthält, die auch schon beim allgemeinen Hexakistetraeder und bei dem holoedrisch-merosymmetrischen Tetrakishexaeder auftraten, und da S_1 von S_4, sowie S_2 von S_3, und ebenso A von C verschieden bleiben, so gilt bezüglich des Verdeckens und Schneidens der Doppelzellen dieser Halbebene dasselbe wie früher.

Zur Bezeichnung der Doppelzellen der anderen Halbebene ist noch nachzutragen:

$$k \equiv (20 + 25); \quad l \equiv (10 + 26); \quad m \equiv (23 + 29).$$

Es ist in bezug auf $S_1 - S_2$	in bezug auf AB
a symmetrisch zu c	$(a \pm c)$ sowie $(f \pm m)$ selbst symmetrisch,
b „ „ g	$(b \pm c)$ symmetrisch zu $(e \pm l)$,
d „ „ h	$(d \pm h)$ „ „ $(i \pm k)$.
e „ „ l	
f „ „ m	
i „ „ k	

Die allophänen Typen ergeben sich als Spezialisierungen des holoedrisch-merosymmetrischen Tetrakishexaeders oder werden in der gleichen Weise wie dort direkt abgeleitet.

I.

Die Aufsenfläche wird von einer einzigen Zellform gebildet.

Nr.	Zellform der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Zellform der symmetrischen Aufsenfläche	Von der symmetrischen Aufsenfläche verdeckte Zellformen	Wenn d. Aufsenfläche holosymmetrisch, ist sie identisch mit d. holosym. Typus
a)	$(b = g)$!	$(a = c)$	$2^1 = 2$	$(e = l)$!	$(a = c)$	—
b)	$(d = h)$!	$(a = c)$, $(b = g)$	$2^2 = 4$	$(i = k)$!	$(a = c)$, $(e = l)$	—
c)	$(f = m)$! $\sim$	$(a = c)$, $(b = g)$, $(e = l)$	$\frac{2^3 - 2^{1+1}}{2} = 2$	—	—	I, e

II.

Die Aufsenfläche wird von zwei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Zellformen der symmetrischen Aufsenfläche	Von der symmetrischen Aufsenfläche verdeckte Zellformen	Wenn d. Aufsenfläche holosymmetrisch, ist sie identisch mit d. holosym. Typus
a)	$(d = h)$. $(e = l)$!	$(a = c)$, $(b = g)$	$2^2 = 4$	$(i = k)$. $(b = g)$!	$(a = c)$, $(e = l)$	—
b)	$(d = h)$. $(f = m)$!	$(a = c)$, $(b = g)$, $(e = l)$	$2^3 = 8$	$(i = k)$. $(f = m)$!	$(a = c)$, $(b = g)$, $(e = l)$	—
c)	$(d = h)$. $(i = k)$! $\sim$	$(a = c)$, $(b = g)$, $(e = l)$	$\frac{2^3 - 2^{1+1}}{2} = 2$	—	—	I, f

III.

Die Aufsenfläche wird von drei Zellformen gebildet.

Nr.	Zellformen der Aufsenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Die Aufsenfläche ist identisch mit dem holosymmetrischen Typus
a)	$(d = h)$. $(f = m)$. $(i = k)$! $\sim$	$(a = c)$, $(b = g)$, $(e = l)$	$\frac{2^3 - 2^{1+1}}{2} = 2$	II, c

Es existieren also im ganzen 7 (halbgeschlossene) allophäne Typen; 4 davon sind neu (d. h. holosymmetrische isophäne Körper ihres Typus sind nicht möglich). 3 der Aufsenfläche sind dagegen selbst holosymmetrisch; deshalb gibt es von ihrem Typus sowohl holosymmetrische wie merosymmetrische Körper. —

Tabelle der konvexen Polyeder.

Art	Name	Name des symmetrischen Polyeders	Typus	△	Art der Ecken
1	—	—	—	—	—
2	$(a = c).\ (\boldsymbol{b = g})!$	$(a = c).\ (\boldsymbol{e = l})!$	I, a	—	$3_2;\ 3_1,\ \widehat{6_{1_\infty}, 6_{1_\infty}}$
3	$(a = c).\ (b = g).\ (\boldsymbol{d = h})!$	$(a = c).\ (e = l).\ (\boldsymbol{i = k})!$	I, b	$_\infty\triangle_\infty$	$3_1,\ \widehat{6_{2_\infty}, 6_{2_\infty}}$
4	$(a = c).\ (b = g).\ (\boldsymbol{d = h}).\ (\boldsymbol{e = l})!$	$(a = c).\ (\boldsymbol{b = g}).\ (e = l).\ (\boldsymbol{i = k})!$	II, a	—	$\widehat{4_3, 4_3};\ \widehat{6_{1_\infty}, 6_{1_\infty}};\ 3_2,\ \widehat{6_{2_\infty}, 6_{2_\infty}}$
5	$(a = c).\ (b = g).\ (\boldsymbol{d = h}).\ (e = l).\ (\boldsymbol{f = m})!$	$(a = c).\ (b = g).\ (e = l).\ (\boldsymbol{f = m}).\ (\boldsymbol{i = k})!$	II, b	—	$6_{2_\infty}, 6_{2_\infty};\ 3_2$
6	—	—	—	—	—

Es existieren also im ganzen 4 konvexe merosymmetrische Polyeder; konvexe Begrenzungsfläche besitzt eines von ihnen ($_\infty\triangle_\infty$); dabei bedeutet „$_\infty\triangle_\infty$“ ein △, von dem zwei Ecken im Unendlichen liegen.

Konzentrische Anordnungen sind unmöglich; denn die beiden einzigen von Parallelstreifen begrenzten Gestalten (Ecken S_{4_∞} bez. S_{3_∞}), würden Kanten enthalten, welche nicht direkt-symmetrisch sind, oder, bei nur direkt-symmetrischen Kanten, in ein holosymmetrisches kontinuierliches Polyeder übergehen.

Von den konvexen Polyedern ist nur eines halbregulär, nämlich:

$\psi_1 = \psi_4$: $(a = c).\ (\boldsymbol{b = g})!$ bez. das symmetrische Polyeder: $(a = c).\ (\boldsymbol{e = l})!$ Typus I, a.

5. Das Hexaeder $(\infty : \infty : 1)$.

Da die unendlichferne Gerade $(B_\infty - C_\infty)$ die einzige Hauptsymmetriekante ist (Fig. 8) und der nicht auf ihr gelegene Punkt R, nämlich A, kein Eckpunkt sein kann, so sind Formen mit Hauptsymmetrielinien als Kanten unmöglich. Aber auch merosymmetrische Gestalten mit nur Zwischensymmetriekanten (Symmetrie der geneigtflächigen Hemiedrie) existieren nicht; denn die Schnittfigur ist auch symmetrisch zu $S_1 - S_4$ und zu $S_2 - S_3$; diese Symmetrie mufs erhalten bleiben und hierdurch wird die einzige etwa in Betracht kommende Doppelzelle (SSR_∞) in alle vier möglichen Lagen in der Schnittfigur gebracht.

Für das Hexaeder gibt es demnach überhaupt keine merosymmetrischen Formen.

6. Das Oktaeder (1 : 1 : 1).

Merosymmetrische Gestalten mit nur Zwischensymmetrielinien als Kanten (Symmetrie der geneigtflächigen Hemiedrie) sind unmöglich, da die Schnittfigur nur in bezug auf Zwischensymmetrielinien symmetrisch ist (Fig. 9). Dagegen sind merosymmetrische Gestalten mit Symmetrie der tritoedrischen Formen wohl möglich.

Da die Punkte R gleichwertig sind, genügt es, einen von ihnen als projizierenden Punkt herauszugreifen; das gleiche für die anderen beiden Punkte durchgeführt, ergibt dieselben Gestalten, nur in anderer Stellung. Die beiden möglichen merosymmetrischen (halbgeschlossenen) Polyeder haben die Begrenzungsfläche: $R-\begin{cases}R-p\bar{q}\\R-p\bar{q}\end{cases}\left(\begin{matrix}\text{in einem Punkt zu-}\\\text{sammenhängend}\end{matrix}\right)$ bez. $(R)-(p\bar{q})_\infty \equiv (p\bar{q})_\infty$ (Parallelstreifen), d. h.:

Art u. Nr.	Name in der ersten Stellung	in der zweiten Stellung	in der dritten Stellung	Typus	‖+	Art der Ecken	
1	(11+12+13+16+17+29)!	(7+8+9+16+17+31)!	(7+9+10+11+13+24)!	a	—	$(\underbrace{8_1 \equiv 8_1}_{4_1})$, $\widehat{4_1, 4_1}$; $\widehat{4_{1\infty} \equiv 4_{1\infty}}$	nichtkonvexe Kreuzgestalt ($\overline{A} = 9$).
2	(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6). (11+12+13+16+17+29)!	(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6). (7+8+9+16+17+31)!	(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6). (7+9+10+11+13+24)!	a	|+	$\widehat{4_{1\infty} \quad 4_{1\infty}}$	konvexe konzentrische Anordnung von zwei aufeinander senkrechten vierflächigen unendlich. Prismen d. rhombischen Systems.

Keines von beiden Polyedern ist halbregulär. —

Im vorigen § ist durch die Bemerkungen auf S. 171 u. 173 gezeigt worden, dafs meroedrisch-merosymmetrische Polyeder nicht existieren. Die Betrachtungen dieses § haben nun ergeben, dafs holoedrisch-merosymmetrische Formen nur beim Tetrakishexaeder, Rhombendodekaeder und Oktaeder möglich sind.

Zur besonderen Kennzeichnung empfiehlt es sich, bei den teilsymmetrischen Polyedern dem Symbol ein „μ“ voranzusetzen (als Abkürzung von $\mu\acute{\varepsilon}\varrho o\varsigma$), z. B. $\mu\ (a.\ \boldsymbol{b}.\ c)_{\infty m 1}$; $\mu\ (\mathrm{II}, \mathfrak{a})_{\infty m 1}$ usw. —

Mit der Behandlung der holoedrisch-merosymmetrischen Gestalten ist nunmehr die Untersuchung des ganzen kubischen Systems zum Abschlufs gebracht.

Kristallographische Schlufsbemerkung.

Es sei hier zum Schlusse noch auf eine Beziehung zur Kristallographie hingewiesen. Während die konvexen Grundformen, die den Kern unserer vollständigen Figuren bilden, fast schon seit Beginn der wissenschaftlichen Beschäftigung mit den Kristallen bekannt waren und in der Natur in grofser Menge angetroffen wurden, hat man irgend welche von den sonstigen im vorhergehenden abgeleiteten Gestalten wohl nur wenig beachtet. Es wurden jedoch derartige Kristalle wirklich aufgefunden, wenn auch nur sehr vereinzelt und äufserst selten. In der Regel deutete man die Körper als „merkwürdige Verzerrungen“ u. dgl.; jedenfalls war man von einer Auffassung als einheitlicher Form im allgemeinen weit entfernt. Werden doch noch in einem der neuesten Werke[1]) die Kristallindividuen (im Gegensatz zu den Kristallaggregaten) durch das Fehlen einspringender Winkel definiert, so dafs „die Form eines überall konvexen Polyeders“ erhalten wird.

Einige der an Kristallen nachgewiesenen nichtkonvexen Typen seien hier kurz angeführt; das an erster Stelle genannte Beispiel verdanke ich einer liebenswürdigen Mitteilung des Herrn Geh. Hofrats v. Groth.

An Bromammoniumkristallen ist das Ikositetraeder, Typus $(\mathrm{I}, \mathrm{b})_{221}$ beobachtet worden.[2]) Es sei besonders hervorgehoben, dafs hier genaue Messungen vorliegen, welche zeigen, dafs die nichtkonvexe Kristallform genau dieselben Parameter besitzt wie das konvexe Ikositetraeder, wenn es als Kristallform des Bromammoniums auftritt. Da überdies hier Kristalle vorkommen, bei denen zum Teil die konvexe Form, zum Teil (durch Verlängerung der gewöhnlichen Flächen) die nichtkonvexe Form ausgebildet ist, so ist hierdurch die Möglichkeit der Auffassung als Durchkreuzungsgestalten ausgeschlossen.[3])

---

[1]) Ernst Sommerfeldt, Geometrische Kristallographie, Leipzig 1906, S. 1.

[2]) Fr. Slavík, Beiträge zur Kenntnis der Ammoniumhalogenverbindungen, Zeitschr. für Kristallogr. u. Min., 1902, **36**, S. 271; vgl. auch: P. Groth, Chemische Kristallographie, Erster Teil, Leipzig 1906, S. 184.

[3]) Aus rein geometrischen Betrachtungen (s. § 7, 2) geht hervor, dafs das Zerfallen eines Polyeders des genannten Typus unmöglich ist, wenn die Teilpolyeder ebenfalls dem kubischen System angehören sollen; ferner zeigt es sich, dafs auch das Zerfallen in hauptachsige Gestalten nur dann möglich wäre, wenn man zuliefse, dafs gewisse Flächenstücke gleichzeitig mehreren Teilpolyedern angehören könnten.

Ferner werden von Salmiak (Chlorammonium) und vom Jodoform, wie aus den Untersuchungen O. Lehmanns[1]) hervorgeht, das Ikositetraeder, Typus (I, h) und das Triakisoktaeder, Typus (I, c) gebildet. Herr Geh. Hofrat O. Lehmann hat mich brieflich gütigst darauf aufmerksam gemacht, dafs man, um hier von wirklichen Kristallformen sprechen zu können, durch Messungen beweisen müfste, dafs die Winkel konstant sind; nach seinen Erfahrungen sei dies nicht der Fall. Diese Winkelmessungen lassen sich aber hier (im Gegensatz zu den oben erwähnten Bromammoniumkristallen) wohl nicht genügend genau ausführen und zwar wegen der Kleinheit der Objekte bezw. wegen der zu starken Verwölbung der Kristallflächen[2]). Dagegen läfst sich, unabhängig von der Frage, ob die von Lehmann gefundenen Gestalten wirkliche Kristallformen vorstellen, aus den Zeichnungen Lehmanns in den zitierten Abhandlungen mit voller Sicherheit die geometrische Gattung und der geometrische Typus dieser Gestalten feststellen, so wie es oben angegeben ist. Es sei hierbei noch bemerkt, dafs nach § 7, 2 die Polyeder des Typus I, h des Ikositetraeders, wenn sie überhaupt zerfallen, höchstens konzentrische Anordnungen von sich selbst durchsetzenden oder selbst nichtkonvexen Teilpolyedern (höhere Triakistetraeder) sein könnten. —

Aus solchen Vorkommnissen wird die Kristallographie eine wichtige Konsequenz zu ziehen haben: Da die gebräuchlichen Symbole von Weifs und Miller nicht ein einzelnes Polyeder, sondern die gesamte vollständige Figur, die ganze Polyederfamilie charakterisieren, so wird man sich zu einer Erweiterung der kristallographischen Zeichen, etwa in der angegebenen Weise, verstehen müssen. Dann erst wird sich die Eindeutigkeit der Beziehung zwischen Symbol und Form ergeben.

---

[1]) O. Lehmann, Über das Wachstum der Kristalle, Zeitschr. f. Krist., 1877, **1**, S. 457 u. Taf. XIX, Fig. 3 und: Über den Schmelzpunkt in Contakt befindlicher Körper und die Elektrolyse des festen Jodsilbers, Wied. Ann., 1885, **24**, S. 2 u. Taf. I, Fig. 4—9. [Fig. 4—6 stellt das Triakisoktaeder, Typus (I, c), Fig. 7—9 das Ikositetraeder, Typus (I, h) dar.] Ferner: Molekularphysik I, Leipzig 1888, S. 332, Fig. 151 u. 152, sowie: Flüssige Kristalle, Leipzig 1904, S. 113, Fig. 322 u. 323 (und Taf. 39, Fig. 2—4).

[2]) Dafs übrigens, wie O. Lehmann betont, diese Formen besondere Wachstumserscheinungen sind, ist ohne weiteres klar; denn selbstverständlich werden derartige kompliziertere Gestalten, seien es nun wirkliche Kristallformen oder nicht, nur unter besonders günstigen Wachstumsverhältnissen sich ausbilden können.

Inhalt.

Seite

Einleitung 45
§ 1. Die vollständige Figur des Hexakisoktaeders 49
§ 2. Die Grundformen und die Anzahl der gleichflächigen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten für irgend eine Hexakisoktaederfamilie 60
§ 3. Die allophänen Typen 75
§ 4. Die konvexen Polyeder 96
§ 5. Die konzentrischen Anordnungen von Polyedern 116
§ 6. Die halbregulären Varietäten 128
§ 7. Die Spezialisierungen des Hexakisoktaeders (Holoedrisch-holosymmetrische Formen) 133
1. Das Tetrakishexaeder 136
2. Das Ikositetraeder 143
3. Das Triakisoktaeder 150
4. Das Rhombendodekaeder 154
5. Das Hexaeder 158
6. Das Oktaeder 160
§ 8. Die Meroedrien 163
A. Die geneigtflächige Hemiedrie 163
1. Das Hexakistetraeder 163
2. Das Triakistetraeder 169
3. Das Deltoiddodekaeder 171
4. Das Tetraeder 173
B. Die parallelflächige Hemiedrie 173
1. Das Diakisdodekaeder 174
2. Das Pentagondodekaeder 174
C. Die plagiedrische Hemiedrie 175
D. Die Tetartoedrie 175
E. Eie Ogdoedrie 177
F. Die Tritoedrie 177
G. Die Hektoedrie 178
§ 9. Die holoedrisch-merosymmetrischen Gestalten 179
1. Das Tetrakishexaeder 179
2. Das Ikositetraeder und 3. das Triakisoktaeder 183
4. Das Rhombendodekaeder 184
5. Das Hexaeder 187
6. Das Oktaeder 188
Kristallographische Schlufsbemerkung 189

Erklärung der Figuren.

Taf. I. Fig. 1. Vollständige Schnittfigur eines Hexakisoktaeders (3 : 2 : 1).

Taf. II. Fig. 2 u. 3. Zu § 6 gehörig.

Fig. 4. Schnittfigur der direkt-symmetrischen Kanten eines Tetrakishexaeders (∞ : 2 : 1).

Fig. 5. „ „ „ „ „ Ikositetraeders (3 : 3 : 1).

Fig. 6. „ „ „ „ „ Triakisoktaeders (2 : 1 : 1).

Fig. 7. „ „ „ „ des Rhombendodekaeders.

Taf. III. Fig. 8. „ „ „ „ (= vollständige Schnittfigur) des Hexaeders.

Fig. 9. „ „ „ „ des Oktaeders.

Fig. 10. „ „ „ „ eines Hexakistetraeders [$\varkappa$(3 : 2 : 1)].

Fig. 11. „ „ „ „ „ Triakistetraedes [$\varkappa$(3 : 3 : 1)].

Fig. 12. „ „ „ „ „ Deltoiddodekaeders [$\varkappa$ (2 : 1 : 1)].

Fig. 13. „ „ „ „ (= vollständige Schnittfigur) des Tetraeders.

Fig. 14. Hexakisoktaeder (3 : 2 : 1) Typus I, 2 [Grundform 2].

Fig. 15. „ (3 : 2 : 1) „ I, 3 [Grundform 3].

Taf. IV. Fig. 16. „ (3 : 2 : 1) „ I, 6 [Grundform 6].

Fig. 17. „ (3 : 2 : 1) „ I, 9 [Grundform 9].

Fig. 18. „ (3 : 2 : 1) [α!] Grundform 16 als Beispiel einer offenen Gestalt.

Fig. 19. „ (3 : 2 : 1) Typus II, 1.

Fig. 20. „ (3 : 2 : 1) „ II, 2.

Fig. 21. „ (3 : 2 : 1) „ III, 3.

Fig. 22. „ (3 : 2 : 1) „ III, 8.

Lebenslauf.

Ich bin am 24. Februar 1887 in Fürth i. B. als Sohn des Kaufmanns Otto Rosenthal geboren. Vom Jahre 1896 ab besuchte ich die erste Klasse des humanistischen Gymnasiums meiner Vaterstadt sowie, nach Übersiedlung meiner Eltern nach München, das Wilhelms-Gymnasium zu München, das ich im Sommer 1905 absolvierte. Sodann studierte ich 1905 bis 1909 Mathematik und Physik an der Universität München und war daneben auch Hospitant der hiesigen Technischen Hochschule. Ich hörte Vorlesungen der Herren Professoren und Dozenten: v. Baeyer, v. Braunmühl †, Doehlemann, Geiger, Graetz, Grofsmann, Lindemann, Lipps, Pringsheim, v. Reinhardstöttner †, Röntgen, v. Seeliger, Sommerfeld, Voll, Vofs, v. Weber.

Allen meinen Lehrern danke ich für genufsreiche Vorlesungen, vielen auch für persönliche Förderung meiner Studien. Ganz besonders aber fühle ich mich verpflichtet, Herrn Geh. Hofrat Lindemann und Herrn Professor Doehlemann, die mir während meiner ganzen Studienzeit wohlwollende und anregende Berater waren, für das grofse Interesse, das sie der vorliegenden Arbeit gütigst entgegengebracht haben, auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank auszudrücken.

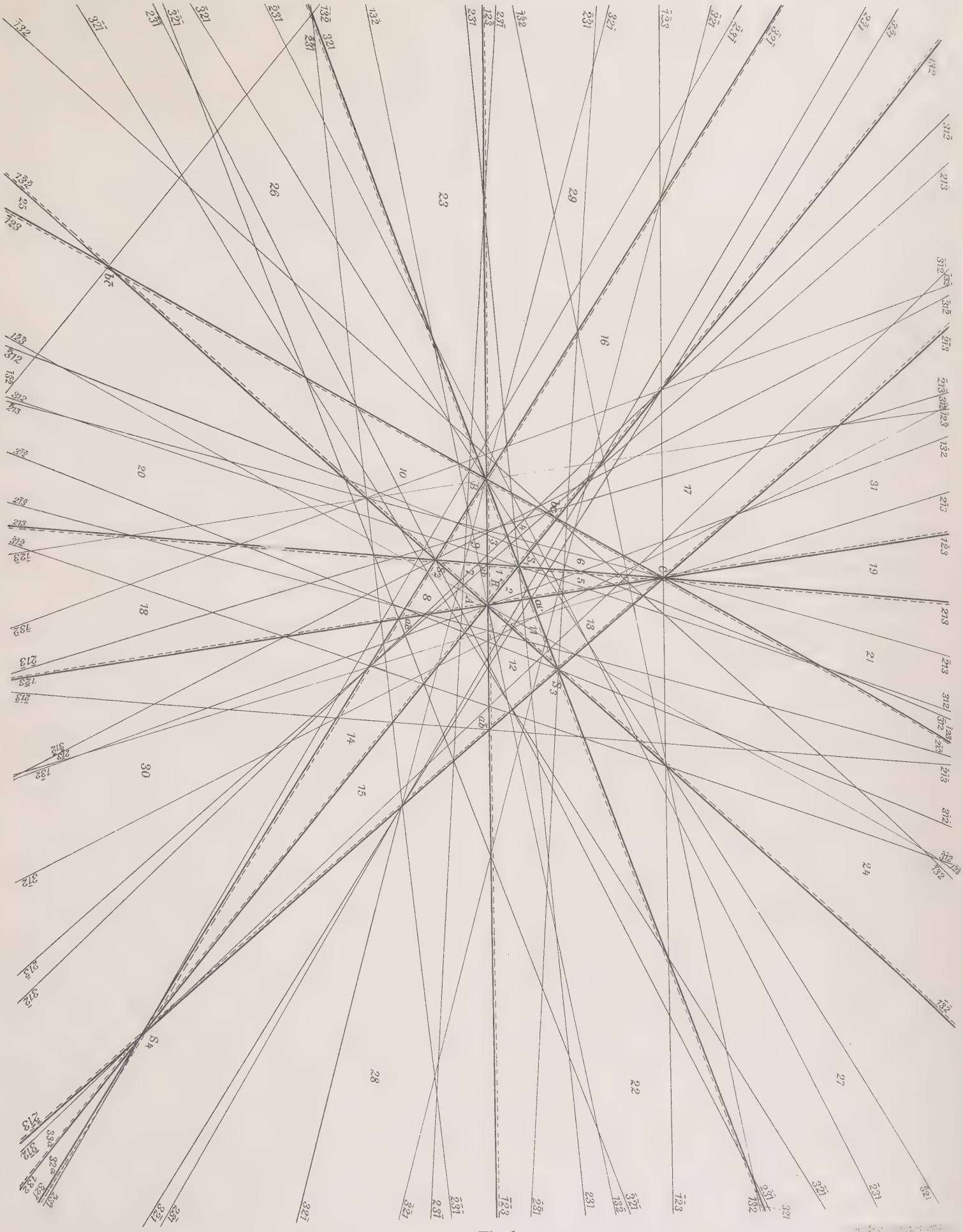

Fig. 1.

A. Rosenthal : Polyeder. Taf. 1.

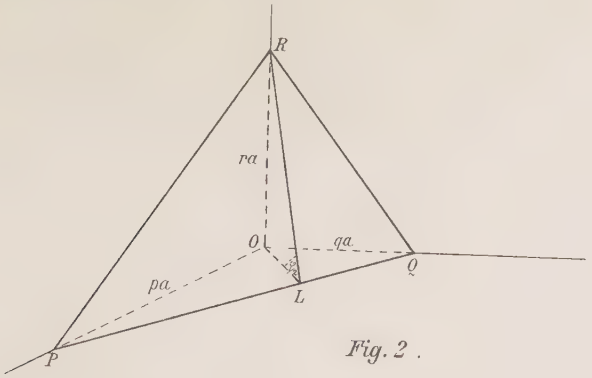

Fig. 2.

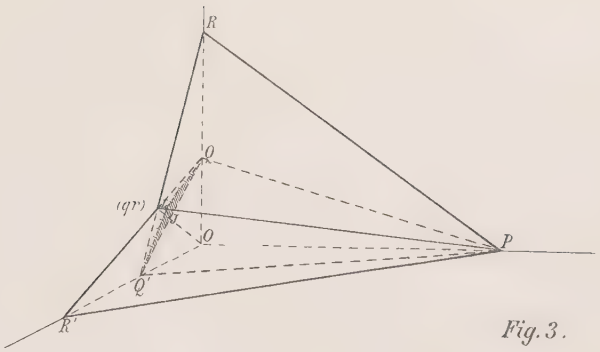

Fig. 3.

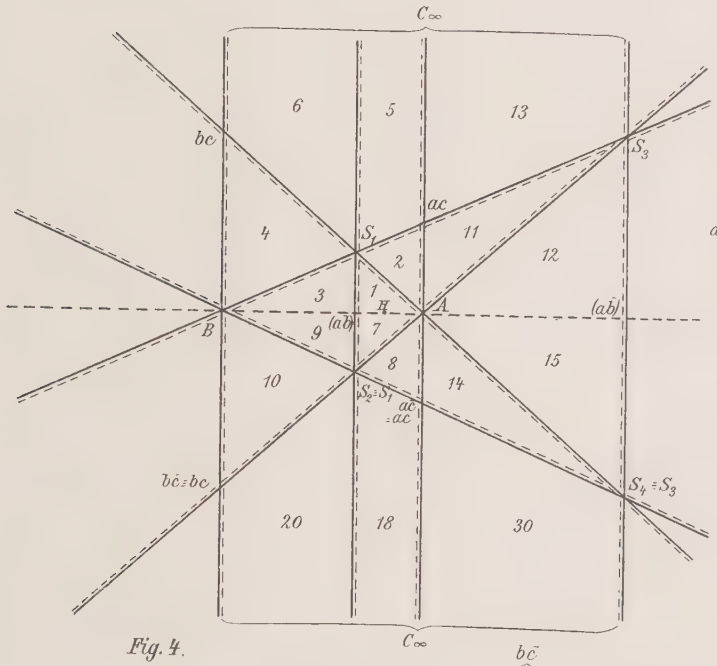

Fig. 4.

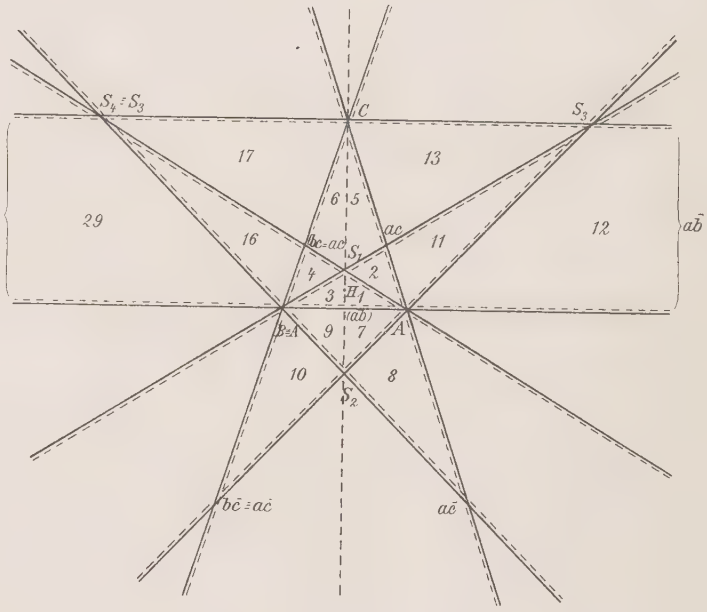

Fig. 6.

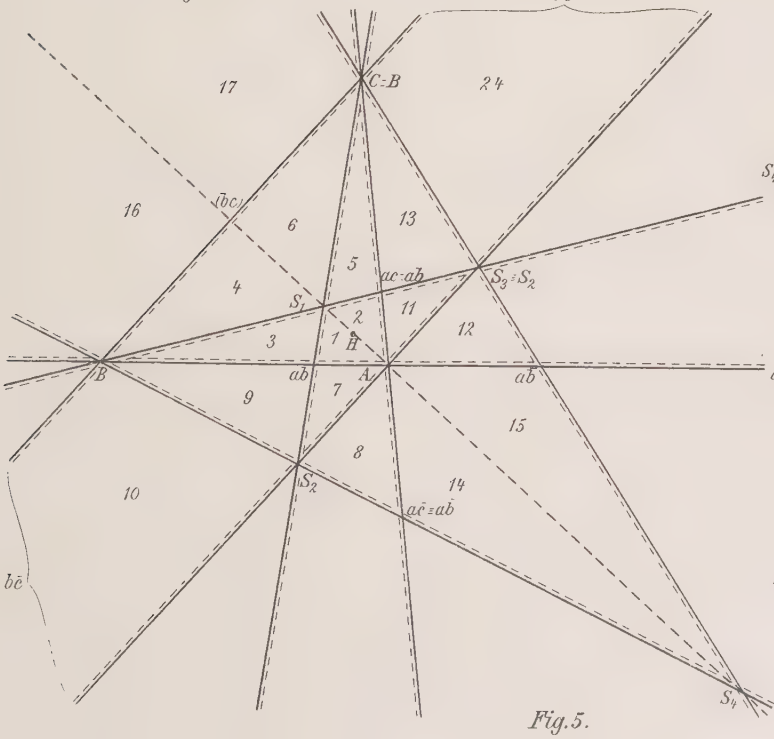

Fig. 5.

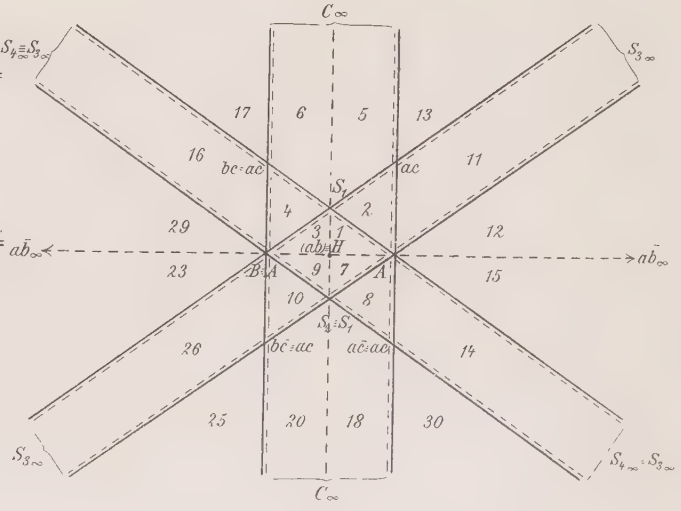

Fig. 7

Lith. Anst. Schindler, Leipzig

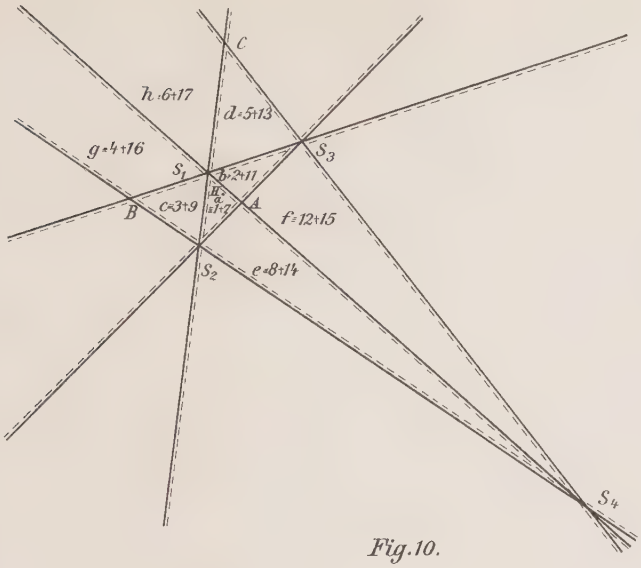

Fig. 10.

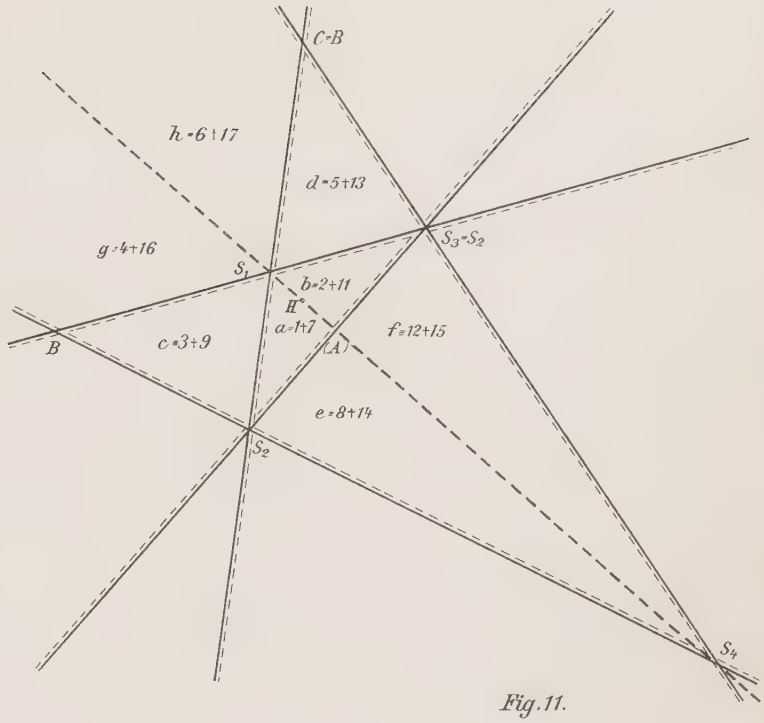

Fig. 11.

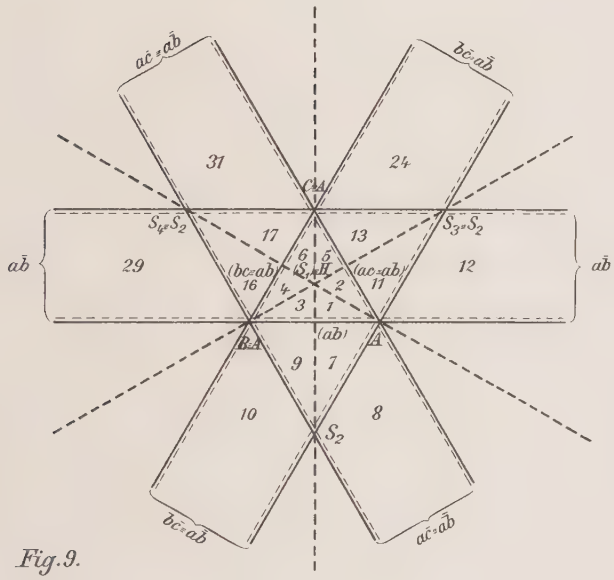

Fig. 9.

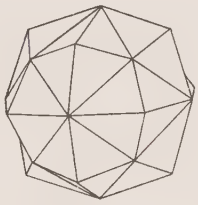

Fig. 14.

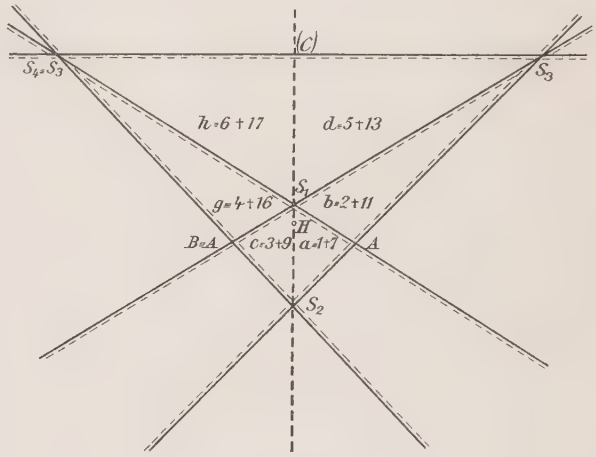

Fig. 12.

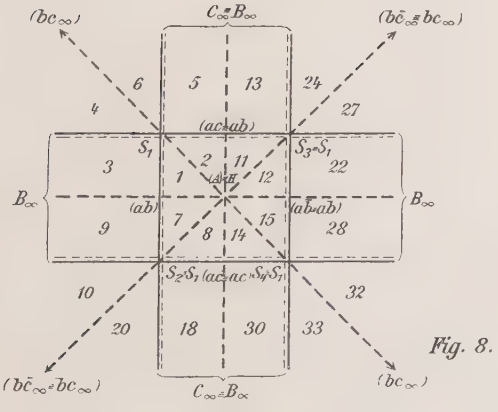

Fig. 8.

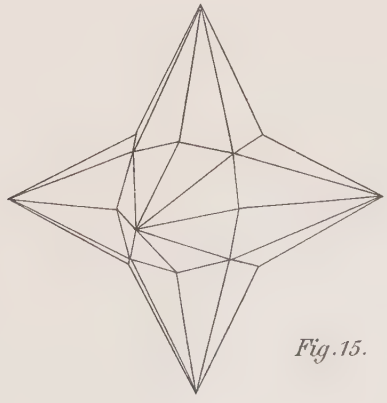

Fig. 15.

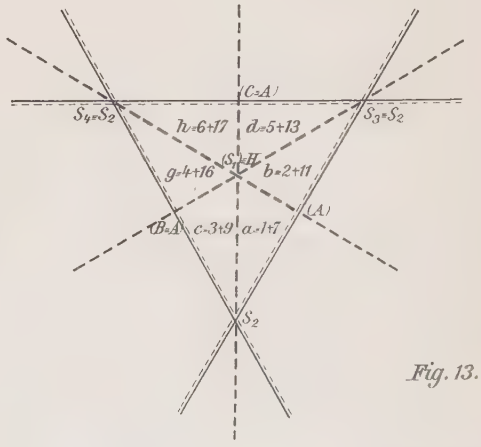

Fig. 13.

Lith. Anst. Schindler Leipzig.

A. Rosenthal : Polyeder. Taf. 3.

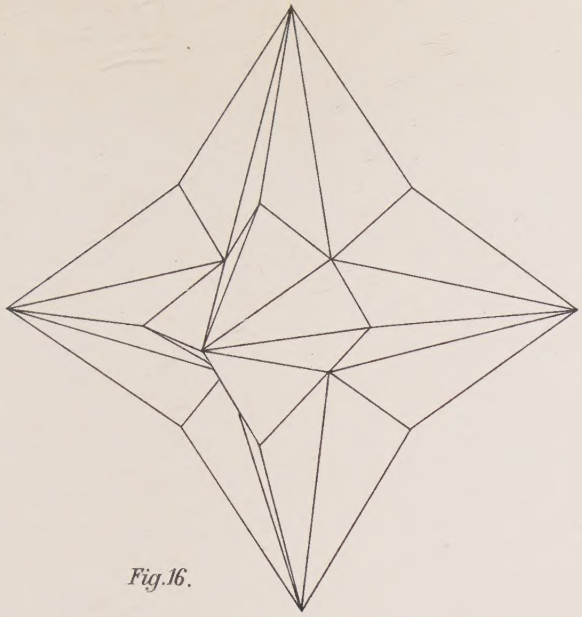

Fig. 16.

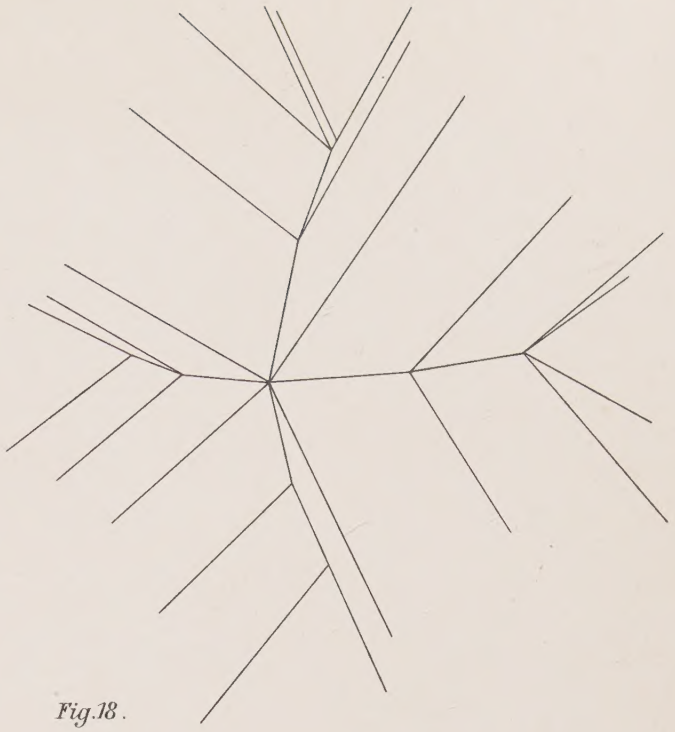

Fig. 18.

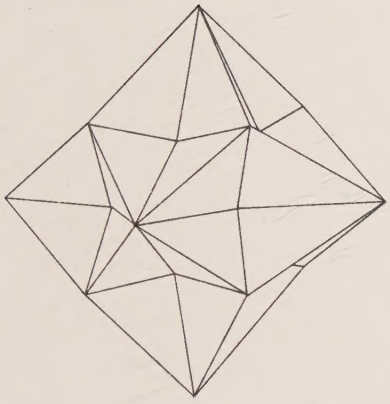

Fig. 17.

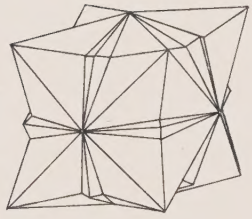

Fig. 20.

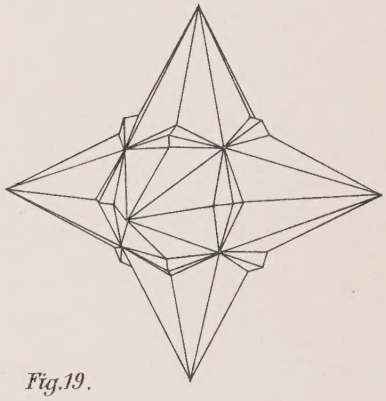

Fig. 19.

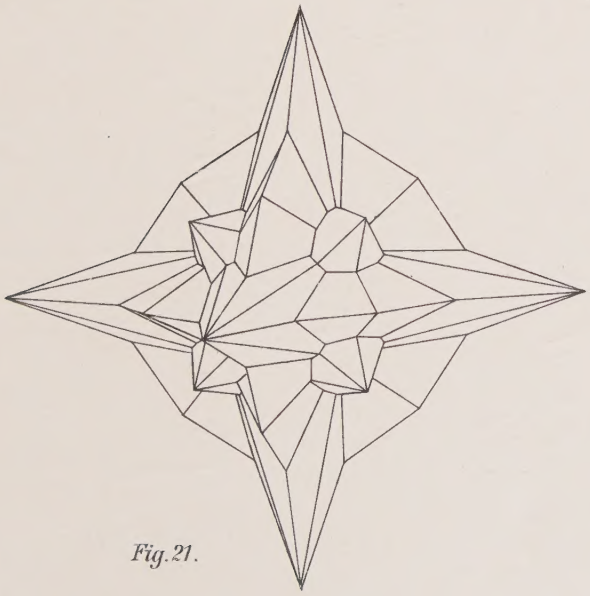

Fig. 21.

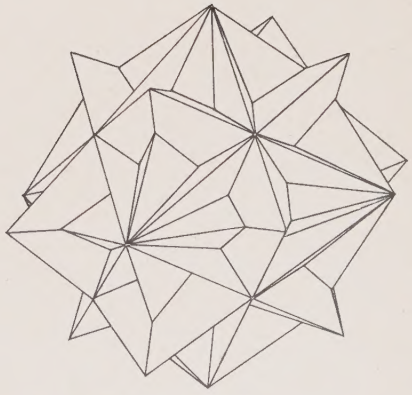

Fig. 22.

Lith. Anst. Schindler, Leipzig.

A. Rosenthal : Polyeder. Taf. 4.